CORSO ELEMENTARE

DI

MATEMATICHE

INTRODUZIONE

AL CALCOLO

GEOMETRIA ANALITICA

A TRE COORDINATE

Del Sig. Bourdon

TOMO SESTO



NAPOLI
PRESSO BOREL E COMP.
1828.

CORSO ELEMENTARE

DI

MATEMATICHE.

CAPITOLO I.

Dei Punti, della linea retta e del Piano nello spazio.

§. I. *Equazione del punto.*

276. In quella guisa che la posizione di un punto sopra di un piano resta determinata per mezzo delle sue distanze da due rette condotte ad arbitrio in questo piano, così vien fissata la posizione di un punto nello spazio, qualora si conoscano le sue distanze da tre piani.

Siano tre piani YAX e XAZ, ZAY, (fig. 169) che supporremo prima perpendicolari fra loro, e che si taglino seguendo la direzione di tre rette AZ, AY, AX, ciascuna delle quali è perpendicolare alle altre due, attesa la teoria dei piani. Denominiamo a, b, c, le distanze di un punto dello spazio da questi tre piani, distanze che si suppongono cognite; diciamo essere il punto completamente determinato riguardo alla sua posizione, ammettendo tuttavia che sappiasi ancora preventivamente che, questo punto trovasi situato nell' interno dell' angolo triedro AXYZ.

In fatti, prendiamo sopra le tre rette AX, AY, AZ, le distanze AB, AC, AD, rispettivamente

eguali alle a, b, c; e guidiamo per i punti B, C, D, dei piani paralleli ai piani dati. Primieramente, poichè i due primi piani paralleli hanno tutti i loro punti situati nelle distanze a, b, dei piani YAZ, XAZ, ne siegue che tutti i punti di Mm, che è l' intersecazione comune di questi due piani paralleli, abbiano, esclusivamente riguardo ogni altro punto, la proprietà di essere situati in queste stesse distanze da YAZ e da XAZ. Dunque, il punto cercato, già si trova in questa retta. Altronde poi, questo punto deve ancora essere situato in qualche parte del terzo piano parallelo, perchè tutti i punti di questo piano, sono, ad esclusione di qualunque altro punto, nella distanza AD $= c$ dal piano XAY. Dunque finalmente, il punto cercato non può essere che M, ove il terzo piano parallelo taglia l' intersecazione comune dei due primi, e così la sua posizione resta determinata del tutto.

Converremo, che dalla x vengano rappresentate le distanze dal piano YAZ valutate sopra AX; da y le distanze dal piano XAZ valutate sopra AY; e da z le distanze dal piano XAY valutate sopra AZ; così che le AX, AY, AZ, intersecazioni dei tre piani due a due, saranno gli *assi* delle x, delle y, e delle z. Questi, complessivamente riguardati, si chiamano *assi coordinati*, ed alle distanze ora indicate si dà il nome di *coordinate del punto*. Tutte queste denominazioni sono analoghe a quelle già addottate nella Geometria a due dimensioni.

Così, verrà da noi chiamato piano delle yz, il piano YAZ perpendicolare all' asse delle x; piano delle xz, il piano XAZ perpendicolare all'asse delle y; e piano delle xy, il piano XAY perpendicolare all' asse delle z. Quest' ultimo piano suole rappresentarsi in una posizione *orizzontale*, ed i due altri in una posizione *verticale*.

Da quanto già si disse risulta, che le equazioni

$$x = a\,,\quad y = b\,,\quad z = c,$$

(essendo a, b, c, quantità note), bastano per fissare la posizione del punto nello spazio. Sono queste, per tal ragione, denominate le *equazioni del punto*.

Dobbiamo ancora osservare che, siccome li tre piani *coordinati*, col prolungarsi indefinitamente per ogni verso, determinano *otto* angoli triedri, cioè *quattro* formati sopra il piano delle xy, e *quattro* sotto questo stesso piano, perciò bisogna ancora esprimere con l' analisi, in quali di questi otto angoli si trovi situato il punto. A tale effetto, basta estendere, alle distanze dai piani, i principj stabiliti (t.° 3.° § 57) per le distanze dai punti o dalle rette, cioè che, se *le distanze valutate sopra* AX *a destra del punto* A *si riguardino come* POSITIVE, *debbano poi riguardarsi come* NEGATIVE *le distanze* valutate a sinistra, cioè nella direzione AX'. Un consimile ragionamento ha luogo per le altre due coordinate.

Devono distinguersi ancora (§ 3) nelle quantità a, b, c, non solo i loro valori aritmetici, ma i segni ancora da cui sono affette, avendo riguardo alle diverse situazioni che può avere il punto negli angoli triedri formati dai tre piani coordinati (t.° 2. § 88).

Da questo nuovo principio dedurremo, per esprimere completamente la posizione di un punto nello spazio, le seguenti combinazioni :

$x=+a$, $y=+b$, $z=+c$, punti posti nell' ang. AXYZ,

$x=-a$, $y=+b$, $=+c$, ... AX'YZ,

$x=+a$, $y=-b$, $z=+c$, ... AXY'Z,

$x=+a$, $y=+b$, $z=-c$, ... AXYZ',

$x=-a$, $y=-b$, $z=+c$, ... AX'Y'Z,

$x=-a$, $y=+b$, $z=-c$, ... AX'YZ',

$x=+a$, $y=-b$, $z=-c$, ... AXY'Z',

$x=-a$, $y=-b$, $z=-c$ . . . . AX'Y'Z',

avremo dunque in tutto *otto* combinazioni, cioè; *due* sistemi con i medesimi segni; *tre* nei quali un segno è negativo e gli altri due positivi; e *tre* ove un segno è positivo e gli altri due negativi.

377. Può anche trovarsi il punto in alcune particolari posizioni. Per esempio, per significare che un punto è situato nel piano delle xy, conviene esprimere che la sua distanza z da questo punto è *nulla*; e allora le equazioni di questo punto sarebbero $x=a$, $y=b$, $z=o$.

Così, da un punto situato nell'asse delle x, per il quale le distanze dai piani delle xz e delle xy sono *nulle* in un tempo, avremo per equazioni $x=a$, $y=o$, $z=o$.

Lo stesso deve dirsi degli altri punti situati, o sopra i piani, o sopra gli assi coordinati.

378. 1.ª *Osservazione*. I piani paralleli ai tre piani coordinati, che ci hanno servito (§ 276) per fissare la posizione del punto M, determinano in unione coi piani coordinati un parallelepipedo rettangolo (t.° 2.° § 94), le di cui dodici *direttrici*, (intendo per direttrice la sezione risultante da due piani), 4 eguali a 4, altro non sono che le tre coordinate x, y, z, del punto M.

Sappiamo poi (t.° 2.° § 85) che i piedi m, m', m'' delle perpendicolari, calate sopra i piani coordinati, sono le *projezioni* del punto M sopra questi tre piani.

Dopo ciò se supporremo che le equazioni del punto M siano $x=a$, $y=b$, $z=c$, avremo per le coordinate

di m', le equazioni . . . . . : $x=a$, $y=b$;

per quelle del punto m'' . . . $x=a$, $z=c$;

onde per quelle del punto m''', . $y=b$, $z=c$,

È di quì che, cognite le projezioni del punto M sopra due dei piani coordinati, ne siegue necessariamente la terza projezione.

Ciò che può anche facilmente scorgersi dalla figura. In fatti, siano m, m' le projezioni date; guidiamo da questi punti, e nei piani delle xy e delle xz, le mC, $m'D$ parallele ad AX; poi, dai punti C, D, e nel piano delle yz, innalziamo la Cm'' parallela ad AZ e la Dm'' parallela ad AY; il punto m'', ove queste due ultime rette s'incontrano, rappresenterà la terza projezione.

379. 2.ª *Osservazione.* Può ancora spiegarsi perchè, nella Geometria descrittiva, *bastino due piani di projezione* per fissare la posizione di un punto, mentre che, nella Geometria analitica, *vi occorrono tre piani coordinati.*

Infatti, la cognizione delle projezioni di un punto sopra un piano orizzontale e sopra un piano verticale, è sufficiente per le grafiche costruzioni; ma, volendosi fissare analiticamente la posizione di ciascuna di queste projezioni, per esempio, dei punti m', m'', bisogna, *primieramente*, delineare nel piano orizzontale (x y) due assi rettangolari AX, AY, secondariamente delineare nel piano verticale (x z) due assi AX, AZ, prendendo, per maggior semplicità, per *asse comune*, l'intersecazione dei due piani di projezione. Ora, è evidente che i due assi AZ, AY, determinano un terzo piano rettangolare con gli altri due.

Perciò, benchè bastino *geometricamente* due piani, pure *analiticamente* ve ne occorrono tre.

280. Quando i piani coordinati non sono rettangolari, nel qual caso gli assi AX, AY, AZ (fig. 170) fanno fra loro angoli qualunque e si deno-

minano *assi obliqui*, le equazioni del punto M sono ancora, $x=a$, $y=b$, $z=c$.

Ma allora le a, b, c, esprimono le distanze parallele a questi assi; e le projezioni del punto M si ottengono dalle rette Mm, Mm', Mm'', rispettivamente parallele ad AX, AY, AZ.

Del resto, quanto si disse §§ 277, 278, è applicabile al caso degli assi obliqui.

281. Occupiamoci adesso nel *ricercare l'espressione della distanza fra due punti* le di cui coordinate siano cognite (v. § 7).

Siano x', y', z', le coordinate di un primo punto M, (fig. 171), x'', y'', z'' quelle di un secondo punto N, riferite prima a tre assi rettangolari AX, AY, AZ. Risulta dalla osservazione (§ 278) che, se dai punti M, N, si calino le perpendicolari Mm, Nn, sopra il piano delle xy, e poi dai punti m, n, le parallele mP, nQ all' asse delle y, debba aversi

$$AP=x', \quad mP=\ ', \quad Mm=z',$$

ed $$AQ=x'', \quad nQ=y'', \quad Nn=z''.$$

Guidiamo poi la mn per determinare un trapezio MNnm, e tiriamo nel piano di questo trapezio la NH parallela ad nm; e sopra il piano delle xy la nL parallela ad AX.

Ciò effettuato, avremo dai triangoli rettangoli MNH ed mnL

$$\overline{MN}^2=\overline{MH}^2+\overline{NH}^2=\overline{mn}^2+\overline{NH}^2, \quad \text{ed}$$

$$\overline{mn}^2=\overline{nL}^2+\overline{mL}^2=\overline{PQ}^2+\overline{mL}^2; \quad \text{onde}$$

$$\overline{MN}^2=\overline{PQ}^2+\overline{mL}^2+\overline{NH}^2. \quad \text{Ma abbiamo}$$

$$PQ=x'-x'', \quad mL=y'-y'', \quad NH=z'-z'', \quad \text{e}$$

$$\overline{PQ}^2=(x'-x'')^2,\ \overline{mL}^2=(y'-y'')^2,\ \overline{NH}^2=(z'-z'')^2,$$

dunque

$$\overline{MN}^2, \text{ o } D^2=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2,$$

e perciò

$$D=\sqrt{[(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2]}.$$

E questa è l' espressione generale della distanza di due punti, in funzione delle coordinate di questi punti riferiti ad assi rettangolari.

Si otterrebbe ancora questa formola nel modo seguente.

Si guidino, nella figura 169, le rette AM, Am; i due triangoli ABm, AmM, rettangoli l' uno in B, l' altro in m, ci danno

$$\overline{Am}^2=\overline{AB}^2+\overline{Bm}^2,\ \overline{AM}^2=\overline{Am}^2+\overline{Mm}^2;\ \text{onde}$$

$$\overline{AM}^2=\overline{AB}^2+\overline{Bm}^2+\overline{Mm}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2.$$

Si vede così, di passaggio, che, in qualunque parallelepipedo rettangolo, *il quadrato di una delle diagonali è eguale alla somma dei quadrati delle tre direttrici contigue.*

Ciò posto, consideriamo i punti M, N, (fig. 171), e guidiamo per ciascuno di questi punti tre piani respettivamente paralleli ai piani coordinati. I due piani, paralleli al piano delle yz, sono necessariamente paralleli fra loro; e lo stesso deve dirsi dei due piani paralleli al piano delle xz, e dei due piani paralleli al piano delle xy. Questi sei piani, paralleli due a due, determinano dunque un parallelopipedo rettangolo di cui MN è una diagonale, e le di cui direttrici, essendo necessariamente parallele ai tre assi sono rispettivamente eguali alle differenze delle distanze dei punti M, N dai tre piani coordinati.

Perciò, chiamando p, q, r, le tre direttrici

contigue di questo parallelepipedo, avremo, atteso quanto si è ora avvertito,

$$\overline{MN}^2 = p^2+q^2+r^2 \;; \quad \text{dunque, essendo}$$

$$p = x'-x'', \quad q = y'-y'', \quad r = z'-z'',$$

$$\overline{MN}^2 \text{ o } D^2 = (x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2.$$

Benchè questa maniera di dimostrare sembri meno semplice della precedente, pure ha il vantaggio di essere applicabile alla ricerca della espressione della distanza fra due punti, quando gli assi sono obliqui.

382. Si suppongano due punti dello spazio riferiti ad assi obliqui; imaginiamoci, come poc' anzi, per ciascuno di questi punti tre piani rispettivamente paralleli ai piani coordinati. I sei piani ottenuti in tal guisa sono paralleli due a due, e determinano nello spazio un parallelepipedo obliquo, la cui distanza dai due punti dati è una delle diagonali, e le di cui direttrici hanno per lunghezza le differenze delle coordinate dei due punti.

Tutta la difficoltà, per ottenere questa diagonale consiste dunque nel *determinare quella di un parallelepipedo obliquo, conoscendo le direttrici di questo parallelepipedo e gli angoli che esse formano fra loro.*

La soluzione che daremo di questo problema è estratta dalla quinta nota della Geometria di Legendre.

Siano ABmCM (fig. 170) un parallelopipedo obliquo; AB, AC, AD, le tre direttrici contigue, AM una delle sue diagonali.

Poniamo, $BA=p$, $AC=q$, $AD=r$, $AM=D$; poi

$$BAC=\alpha\,,\ BAD=\beta\,,\ CAD=\gamma\,,\ DAM=\delta\,;$$

(le quantità D, δ sono incognite).

Dai due triangoli obbliquangoli ABm, AmM abbiamo (t.° 3.° § 130)

$$\overline{Am}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{Bm}^2 + 2AB\times Bm.\cos BAC, \quad \text{ed}$$

$$\overline{AM}^2 = \overline{Am}^2 + \overline{Mm}^2 + 2Am\times Mm.\cos DAm; \quad \text{onde}$$

$$\overline{AM}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{Bm}^2 + \overline{Mm}^2 + 2AB\times Bm.\cos BAC + 2Am\times Mm.\cos DAm,$$

ovvero, adottando le convenute indicazioni,

$$D^2 = p^2 + q^2 + r^2 + 2pq.\cos\alpha + 2r.Am.\cos\delta \ldots (1).$$

Così tutto consiste nel determinare cos δ; poiche Am è già cognita, mediante la prima delle equazioni poc' anzi addotte; ma vedremo or ora che è inutile il sostituire attualmente il suo valore.

Per calcolare l'ang. δ, ricorreremo ai principj della Trigonometria sferica. Riguardiamo A come il centro di una sfera, le di cui intersecazioni con i piani BAC, BAD, CAD, DAm, siano gli archi del cerchio maggiore EF, EG, GF, GH; risulta da tal costruzione, che agli angoli α, β, γ, δ, possono venir sostituiti i tre lati del triangolo sferico e l' arco GH; cioè che avremo

$$EF = \alpha, \; EG = \beta, \; GF = \gamma; \; GH = \delta.$$

Ciò posto, i due triangoli sferici GEF, GHE ci danno (t.° 3.° § 159)

$$\cos E = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}, \quad \text{e}$$

$$\cos\delta = \cos\beta\cos EH + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen} EH.\cos E;$$

o, ponendo, in luogo di cos E, il suo valore,

$$\cos\delta = \cos\beta\cos EH + \frac{\operatorname{sen} EH\cos\gamma - \operatorname{sen} EH\cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha};$$

o, riducendo l'intera frazione ed osservando che

$\mathrm{sen}\alpha\cos EH - \mathrm{sen}EH\cos\alpha = \mathrm{sen}(\alpha - EH) = \mathrm{sen}FH$,

$$\cos\delta = \cos\beta.\frac{\mathrm{sen}\,FH}{\mathrm{sen}\,\alpha} + \cos\gamma\frac{\mathrm{sen}\,EH}{\mathrm{sen}\,\alpha} \;.\;.\;.\;.$$

Ma i triangoli rettilinei ACm, ABm, ci danno

1.° $Am : Cm :: \mathrm{sen}\,ACm : \mathrm{sen}\,CAm$; onde

$$\frac{p}{Am} = \frac{\mathrm{sen}\,CAm}{\mathrm{sen}ACm} = \frac{\mathrm{sen}\,FH}{\mathrm{sen}\,\alpha};$$

2.° $Am : Bm :: \mathrm{sen}\,ABm : \mathrm{sen}\,BAm$; onde

$$\frac{q}{Am} = \frac{\mathrm{sen}BAm}{\mathrm{sen}ABm} = \frac{\mathrm{sen}\,EH}{\mathrm{sen}\,\alpha}; \text{ dunque}$$

$$\cos\delta = \cos\beta.\frac{p}{Am} + \cos\gamma.\frac{q}{Am}; \text{ e perciò}$$

$$Am \times \cos\delta = p\cos\beta + q\cos\gamma.$$

Sostituendo questo valore di $Am\cos\delta$ nella (1), ottiensi

$$D^2 = p^2 + q^2 + r^2 + 2pq\cos\alpha + 2pr\cos\beta + 2qr\cos\gamma;$$

d'onde otterremo in fine, per l'espressione generale della distanza fra due punti riferiti ai tre assi obliqui,

$$D^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 + 2(x' - x'')(y' - y'')\cos\alpha + 2(x' - x'')(z' - z'')\cos\beta + 2(y' - y'')(z' - z'')\cos\gamma.$$

Se, in questa formola, si supporrà $z' = o$, $z'' = o$, cioè se la distanza fra le projezioni dei due punti verrà riguardata sopra il piano delle xy, otterremo

$$D^2=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+2(x'-x'')(y'-y'')\cos\alpha;$$

risultato identico con quello già ottenuto nel § 8.

§ II. *Equazione della linea retta nello spazio.*

283. Quando due punti sono in linea retta nello spazio, sappiamo (t.° 2.° § 85) che le loro projezioni sopra uno stesso piano *sono similmente in linea retta*, e che questa seconda retta si chiama la *projezione* della prima sopra questo piano. Si sa ancora che le projezioni di una retta sopra due piani bastano per determinare la sua posizione. Siegue di quì che una retta sarebbe fissata analiticamente, qualora si conoscessero le equazioni delle sue projezioni sopra due dei tre piani coordinati.

Sogliono considerarsi le projezioni della retta sopra i piani delle xz e delle yz; e siccome questi due piani hanno per asse comune, AZ, perciò questa retta, in ciascuno dei piani, vien riguardata come asse delle ascisse; AX è allora l'asse delle ordinate sopra il piano delle xz, ed AY è l'asse delle ordinate sopra il piano delle yz.

Così, sia MN (fig. 172) una qualunque retta nello spazio, ed mn, $m'n'$ siano le sue projezioni sopra i piani delle xz e delle yz. Daremo alle equazioni di queste due projezioni la forma

$$\left\{\begin{array}{l} x=az+\alpha \;.\;.\;.\;(1) \\ y=bz+\beta \;.\;.\;.\;.\;(2) \end{array}\right\}$$

ove a, b, sono costanti che (§ 30) indicano le tangenti degli angoli formati dalle mn, $m'n'$ con l'asse delle z; ed α, β, esprimono le distanze dell'origine dai punti B e C ove queste rette incontrano l'asse delle x e l'asse delle y.

284. Deve qui osservarsi che l'equazione $x=az+\alpha$ esprime non solo una relazione fra le x

e le z di tutti i punti della mn, ma ancora una relazione fra le x e le z di tutti i punti del piano $mnNM$, imaginato colla mn, perpendicolarmente al piano delle xz; poichè, per qualunque punto M della perpendicolare nM a questo piano, le coordinate x e z sono (§ 178) rappresentate dalle mP, AP, che appartengono ancora alla retta mn.

In simil guisa, l'equazione $y=bz+\beta$, non solo conviene a tutti i punti della projezione $m'n'$, ma ancora a tutti quelli del piano ad $m'n'NM$ guidato perpendicolarmente al piano delle yz, mediante la retta $m'n'$.

Dunque il sistema di queste due equazioni esiste per tutti i punti della retta MN, intersecazione dei piani perpendicolari, e non esiste che per questi punti. Queste equazioni sono in questo senso, *le equazioni della retta stessa*, benchè si siano stabilite in prima per quelle delle due projezioni.

Risulta evidentemente da ciò che l'eliminazione della variabile z fra le due equazioni, dia luogo ad una terza equazione in x ed y; che rappresenta la projezione $m''n''$ della retta sopra il piano delle xy; o, più generalmente, questa equazione appartiene a tutti i punti del piano $MNn''m''$ guidato secondo la retta MN perpendicolarmente al piano delle xy.

285. *Casi particolari.* Quando la retta passa per l'origine, lo stesso accade riguardo alle sue projezioni; perciò (§ 283) le distanze α, β, si annullano, e le equazioni della retta riduconsi ad $x=az$, $y=bz$.

Può accadere che sia situata la retta in uno dei piani coordinati, per es., nel piano delle xz. Avremo allora, per tutti i punti di questa retta, $y=o$; e le equazioni divengono $x=az+\alpha$, $y=o$; cioè, in tal caso, dobbiamo avere $b=o$, $\beta=o$;

ciò che si rende anche evidente dalla figura, poichè la projezione della retta, sopra il piano delle yz, si confonde con l'asse delle z.

Un consimile raziocinio deve estendersi agli altri due assi coordinati.

386. Finchè le costanti a, b, α, β, sono date *a priori*, la posizione della retta è completamente determinata. Per ottenere i diversi punti, basta dare, nelle due equazioni $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$, alla veriabile z, per esempio, un valore particolare z', dal che ne siegue, per ciascuna delle altre due, x ed y, un valore corrispondente, cioè:

$$x=az'+b=x', \quad y=bz'+\beta=y'.$$

Presa allora sopra AX (fig. 173) una distanza $AP=x'$, si conduca la Pm'' parallela ad AY ed eguale ad y'; poi, dal punto m'', si concepisca una perpendicolare al piano delle xy, che sia eguale a z'; ed il punto M, determinato in simil guisa, apparterrà alla retta. Nel modo istesso potrebbero ottenersi tutti gli altri punti.

Che se ci proponessimo di determinare le costanti a, b, α, β, dipendentemente da certe condizioni; è allora che avrebbe luogo una serie di problemi di tre dimenzioni, analoghi a quelli che ci ha presentati la linea retta considerata sopra di un piano.

287. 1.° Quesito. *Trovare le equazioni di una retta sottoposta a passare per due punti dati.*

Siano x', y', z', le coordinate del primo punto, ed x'', y'', z'' quelle del secondo punto. Le equazioni della retta cercata avranno prima la forma

$$x=az+\alpha. \quad . \quad . \quad (1),$$
$$y=bz+\beta. \quad . \quad . \quad (2),$$

essendo a, b, α, β, quantità per ora incognite.

E siccome i punti (x', y', z'), (x'', y'', z'')

appartengono alla retta, perciò le loro coordinate devono verificare le equazioni (1), (2), e darci le quattro relazioni

$$x'=az'+\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$
$$y'=bz'+\beta. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$
$$x''=az''+\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$
$$y''=bz''+\beta. \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Applicando a queste sei equazioni il metodo del n.° 18, troveremo successivamente

$$\left.\begin{array}{l} x-x'=a(z-z'), x'-x''=a(z'-z''), \\ y-y'=b(z-z'), y'-y''=b(z'-z''), \end{array}\right\} \text{e} \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{x'-x''}{z'-z''} \\ b=\dfrac{y'-y''}{z'-z''} \end{array}\right.$$

e perciò,

$$x-x'=\frac{x'-x''}{z'-z''}(z-z'), \ y-y'=\frac{y'-y''}{z'-z''}(z-z').$$

Queste due ultime equazioni che non contengono più che le variabili x, y, z, e le quantità cognite x', y', z', x'', y'', z'', sono le ricercate equazioni.

N. B. Dalle equazioni $x-x'=a(z-z')$, $y-y'=b(z-z')$, ottenute nel corso del calcolo, vien caratterizzata una linea retta che passa per il punto (x', y', z',) poichè restano esse addempite dalla ipotesi di $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$ Le quantità a, b, si determinano poi mediante una seconda condizione che può imporsi alla retta. Questa condizione, nel precedente problema, consiste nel far passare la retta per un secondo punto.

288. 2.° Quesito. *Per un punto dato fuori di una retta condurre una parallela a questa retta.*

Siano x', y', z', le coordinate del punto. Avremo, per le equazioni della retta data,

$$x=az+\alpha\,, \qquad y=bz+\beta.$$

La forma di quelle della retta cercata sarà (§ 287)

$$x-x'=a'(z-z'), \qquad y-y'=b'(z-z');$$

(a', b', sono quantità da determinarsi).

Siccome le rette sono parallele, i piani, che le projettono rispettivamente sopra i due piani delle xz e delle yz, devono essere paralleli; e perciò le intersecazioni di questi piani paralleli con i piani coordinati, cioè le projezioni delle due rette, sono ancor' esse parallele. Dunque avremo necessariamente (§ 20) le relazioni $a'=a$, $b'=b$; ciò che ci dà finalmente per le equazioni della retta cercata

$$x-x'=a(z-z'), \qquad y-y'=\beta(z-z').$$

289. 3.° Quesito. *Date due rette dalle loro equazioni, esprimere coll' analisi, che queste rette s' incontrano, e trovare, in tal caso, le coordinate del loro punto d' intersecazione.*

Siano $\left\{\begin{array}{ll} x=az+\alpha. & (1) \\ y=baz+\beta. & (2) \end{array}\right\}$ e $\left\{\begin{array}{ll} x=a'z+\alpha'. & (3) \\ y=b'z+\beta'. & (4) \end{array}\right.$

le equazioni delle due rette.

Se esse si tagliano, dovranno nel tempo stesso verificarsi le quattro equazioni dalle coordinate del loro punto d' intersecazione; perciò, queste coordinate altro non sono che i valori di x, y, z, atti a soddisfare, nel tempo stesso, a queste equazioni; e siccome abbiamo tre incognite da eliminare fra quattro equazioni, dovremo giungere necessariamente (t.° 1.° § 123) ad una relazione fra le costanti a, b, α, β, a', b', α', β'.

Le equazioni (1) e (3), (2) e (4), sottratte successivamente l' una dell' altra, ci danno

$$o=(a-a')\,z+\alpha-\alpha'\;;\;\text{cioè}\quad z=\frac{\alpha'-\alpha}{a-a'},$$

$$o=(b-b')\,z+\beta-\beta'\;;\;\text{cioè}\quad z=\frac{\beta'-\beta}{b-b'}$$

Ma questi due valori di z devono eguagliarsi; avremo dunque

$$\frac{\alpha'-\alpha}{a-a'}=\frac{\beta'-\beta}{b-b'},\ o\ (\alpha-\alpha)(b-b')-(\beta'-\beta)(a-a')=o\,.\ .\ (5).$$

Ed è questa la relazione che esister deve fra le costanti ad oggetto che le due rette si taglino.

Supponendo che una tal relazione venga addempita, otterremo per le coordinate del punto d'intersecazione,

$$z=\frac{\alpha'-\alpha}{a-a'},\ o\ \frac{\beta'-\beta}{b-b'},\ x=\frac{a\alpha'-\alpha a'}{a-a'},\ y=\frac{b\beta'-\beta b'}{b-b'}.$$

Sia, per caso particolare, $a=a'$, $b=b'$, il che significa (§ 288) che le due rette sono parallele; l'equazione (5) resta soddisfatta, ed i valori di x, y, z, si riducono alla forma $\frac{M}{o}$; risultato analogo a quello del n.° 22.

290. 4.° Quesito. *Due rette date dalle loro equazioni, determinare l'angolo che formano fra loro.*

$$\text{Siano}\ \left\{\begin{array}{l} x=az+\alpha\,, \\ y=bz+\beta\,, \end{array}\right\}\ \text{e}\ \left\{\begin{array}{l} x=a'z+\alpha'\,, \\ y=b'z+\beta'\,, \end{array}\right.$$

le equazioni delle due rette.

Possono presentarsi due circostanze: o le rette *si tagliano*; e allora l'equazione di condizione del numero precedente vien soddisfatta: ovvero *non s incontrano mai.*

In ambedue i casi: Se da un qualunque punto dello spazio imagineremo due altre rette rispettivamente parallele alle rette date, dovrà determinarsi l'angolo formato da queste parallele.

Per una maggior semplicità, prenderemo il punto indicato nella stessa origine delle coordinate. Siano perciò le AL, AL′ (fig. 173) parallele alle due rette date, avremo (n.° 285, e 288) per le loro equazioni,

$$\left.\begin{array}{l} x=az. \ . \ . \\ y=bz. \ . \ . \end{array}\right\} (1), \text{ e } \left\{\begin{array}{l} x=a'z. \ . \ . \\ y=b'z. \ . \ . \end{array}\right\} (2).$$

Per ottenere l'angolo LAL′, prendiamo sopra i lati, due parti AM, AM′ eguali al raggio delle tavole, o eguali ad 1; poi uniamo i punti M ed M′, indicando le loro coordinate con x', y', z', ed x'', y'', z''.

Ciò posto, chiameremo D la distanza MM′, ed avremo (§ 281) per espressione di tal distanza,

$$D^2=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2,$$

o, sviluppando, ed osservando che le coordinate del punto M e quelle del punto M′ sono legate (§ 282) dalle relazioni

$$x'^2+y'^2+z'^2=1. \ . \ . \ (3), \quad x''^2+y''^2+z''^2=1 \ldots (4),$$

$$D^2=2-2\,(x'x''+y''y''+z'z'').$$

Altronde poi, il triang. AMM′ ci dà (t.° 3.° § 130)

$$\cos MAM', \text{ o } \cos V=\frac{\overline{AM}^2+\overline{AM'}^2-\overline{MM'}^2}{2AM\times AM'}=\frac{2-D^2}{2},$$

ovvero, ponendo qui il valore di D^2,

$$\cos V=x'x''+y'y''+z'z''. \ . \ . \ . \ (5).$$

Dunque, tutto adesso si riduce ad ottenere le coordinate x', y', z', ed x'', y'', z'', in funzioni delle costanti a, b, a', b'.

Ora le coordinate del punto (x' , y' , z'), che si trova sulla retta AL, devono verificare le equazioni (1); e darci perciò le due

relazioni. . . . . . . $\left\{ \begin{array}{l} x'=az' , \\ y'=bz' , \end{array} \right\}$

le quali colla (5) ci daranno i valori di x', y', z'.

Portando infatti nella relazione (3) i valori di x', e di y' che ci danno le due prime, otterremo

$(a^2+b^2+1)\ z'^2=1$; onde $z'=\dfrac{1}{\sqrt{(a^2+b^2+1)}}$,

ciò che serve per farci ottenere per y' ed x',

$$y'=\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2+1)}},\ x'=\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2+1)}}.$$

Nel modo stesso per le coordinate x''; y'', z'', del punto M, si otterrebbero le

$$z''=\frac{1}{\sqrt{(a'^2+b'^2+1)}},y''=\frac{b'}{\sqrt{(a'^2+b'^2+1)}},x''=\frac{a'}{\sqrt{(a'^2+b'^2+1)}}.$$

Sostituendo questi valori nella equazione (5), otterremo finalmente per il coseno dell' angolo richiesto

$$\cos V=\frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{[(a^2+b^2+1)\ (a'^2+b'^2+1)]}}\ldots (6) ;$$

espressione capace di due valori, atteso il radicale, come dev' essere; poichè le due rette formano fra loro due angoli, *supplemento* l' uno dell'altro.

291. Potrebbe trovarsi un' altra espressione del cos V, per mezzo di alcune riflessioni che avranno luogo anche in seguito.

Caliamo dal punto M (fig. 173) la perpendicolare Mm nel piano delle xy, e guidiamo la mP parallela all' asse delle y; avremo, da tal costruzione, AP$=x'$, P$m=y'$, M$m=z'$. Di più, essen-

do il piano MmP parallelo al piano delle yz, la retta che unisce il punto M con il punto P è perpendicolare ad AP; e siccome si è presa AM=1, ne siegue che AP, o x', sia eguale al coseno dell'angolo che forma la retta AM con l'asse delle x. In simil guisa si dimostrerebbe che y' e z' sono eguali ai coseni degli angoli formati dalla retta con gli assi delle y e delle z.

Dunque, chiamando α, β, γ questi tre angoli, avremo

$$x'=\cos\alpha,\quad y'=\cos\beta,\quad z'=\cos\gamma.$$

Così, per gli angoli α', β', γ' formati dalla AM' con i tre assi, si otterrebbe

$$x''=\cos\alpha',\quad y''=\cos\beta',\quad z''=\cos\gamma',$$

Questi valori portati nella (5), del n.° 291, ci danno

$$\cos V=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma' \ldots \quad (7)$$

292. Deduciamo dai calcoli precedenti alcune conseguenze di somma importanza:

1.° La relazione (3), del n.° 290, ci dà, sostituendo ad x', y', z', il $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$,

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1;$$

ciò che dimostra che *la somma dei quadrati dei coseni degli angoli che forma una qualunque retta con i tre assi è eguale all'unita*; proposizione che risulta ancora dalla relazione che esiste fra la diagonale di un parallelepipedo rettangolo e le tre direttrici contigue (§ 281).

2.° Dalle $x'=az'$, $y'=bz'$, risulta $a=\frac{x'}{z'}$, $b=\frac{y'}{z'}$,

e perciò, $$a=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\quad b=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Dunque le costanti a, b, delle equazioni di una retta, hanno per rispettivi valori *i rapporti fra i coseni degli angoli che forma la retta con l' asse delle x e con l'asse delle y e fra il coseno dell' angolo che essa forma con l' asse delle z.*

3.° Finalmente, le equazioni (8), cioè

$$\cos\alpha = a\cos\gamma\,,\quad \cos\beta = b\cos\gamma\,,$$

innalzate al quadrato e addizionate colla identità $\cos^2\gamma = \cos^2\gamma$, ci danno

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma, \text{ o } 1 = (a^2+b^2+1)\cos^2\gamma; \text{ dunque}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2+1)}}\,,\quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2+1)}}\,,$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2+1)}} \quad \ldots\ldots \quad (9).$$

Queste ultime formole ci danno gli angoli che forma una retta con i tre assi, conoscendo le tangenti a, b, degli angoli fatti dalle sue projezioni sopra i piani delle xz e delle yz, con l' asse delle z.

All' opposto, quando siano dati gli angoli che la retta forma con i tre assi, dalle formole (8) conosceremo le costanti a, b, delle equazioni della retta.

Osserveremo su tal proposito che, dalla relazione $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, da cui vengono connessi gli angoli α, β, γ, non possono darsi ad arbitrio che due di questi angoli; e la relazione ci darà il valore corrispondente del terzo angolo.

293. Riprendiamo la formola (6), e vediamo ciò che essa divenga nelle due ipotesi in cui le rette date sono *parallele* o *perpendicolari* fra loro.

Nel 1.° caso, deve aversi $\cos V = 1$, cosichè risulta fra a, b, a', b' la relazione

$$aa' + bb' + 1 = \sqrt{[(a^2+b^2+1)(a'^2+b'^2+1)]}.$$

E, facendo scomparire il radicale e riducendo,

$$(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-ba')^2=o,$$

equazione che non può esistere, se non sia separatamente $a=a'$, $b=b'$, $ab'=ba'$.

L' ultima di queste tre relazioni resta implicitamente compresa dalle altre due; e già sappiamo (§ 288) che queste esprimono che due rette, nello spazio, sono parallele fra loro.

Nel 2.° caso, il cos V dev' esser *nullo*; ciò che ci dà necessariamente $aa'+bb'+1=o$.

E questa è la condizione che esprime che due rette sono perpendicolari fra loro, ciò che altronde può aver luogo senza che queste rette si taglino. Riunendovi l' equazione

$$(a-a')(\beta'-\beta)-(b-b')(\alpha'-\alpha)=o$$

trovata (n.° 289), si otterrebbero le due relazioni che devono esistere fra le costanti, affinchè le rette *si taglino ad angolo retto*.

La (7) diviene, nella medesima circostanza,

$$\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'=o;$$

in seguito si vedrà l' uso di tal risultato.

294. Potremmo qui, servendoci de' principj ora stabiliti, ridurre alla risoluzione a tre dimenzioni quel problema già risoluto (§ 27) con due dimensioni: *calare, da un punto dato fuori di una retta, una perpendicolare sopra questa retta, e trovare la lunghezza di questa perpendicolare.*

Siano infatti, $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$

le equazioni della retta data. Chiamando x', y', z' le coordinate del punto, avremo (387) per la retta cercata, due equazioni della forma

$$x-x'=a'(z-z'),\ y-y'=b'(z-z');$$

ove le quantità a', b' sono le sole costanti che restano da determinarsi.

E, poichè le due rette devono essere perpendicolari fra loro, avremo questa prima relazione $aa'+bb'+1=o$; altronde poi, siccome si tagliano, dev' essere (§ 289)

$$(a-a')(\beta'-\beta)-(b-b')(\alpha'-\alpha)=o,$$

o, ponendo in luogo di β', α', i loro valori $y'-b'z'$ ed $x'-a'z'$,

$$(a-a')(y'-b'z'-\beta)-(b-b')(x'-a'z'-\alpha)=o.$$

Questa relazione, combinata con $aa'+bb'+1=o$, ci darebbe i valori di a', b', i quali, sostituiti nelle equazioni della seconda retta, ci condurrebbero finalmente alle equazioni della retta cercata.

Ma i calcoli, specialmente relativi alla seconda parte del quesito, sarebbero molto complicati; ed è perciò che addurremo fra poco un mezzo molto più semplice per risolvere questo stesso problema.

295. *Conseguenza generale.* I principj fissati riguardo alla linea retta, dal n.° 283 fino al n.° 289 inclusivamente, sono veri, *qualunque siasi l' inclinazione degli assi coordinati. Perciò*, nel caso degli assi obliqui, le equazioni di una retta hanno sempre la forma

$$x=az+\alpha, \quad y=bz+\beta;$$

soltanto che le rette, in luogo di venir projettate sopra i piani coordinati mediante le perpendioolari a questi piani, vengono (§ 280) ad esserlo *parallelamente agli assi*; e le quantità a, b, non esprimono più le tangenti trigonometriche, ma *i rapporti dei seni*; le costanti α, β, conservano il medesimo significato.

Sono pur' anche indipendenti dall' inclinazione degli assi, e l' equazioni di una retta che passa per due punti dati, e le condizioni del parallelismo di due rette, ec. Ma non è così del quesito che ha per oggetto la determinazione dell' angolo

di due rette, e di tutte le conseguenze che ne sono state dedotte, poichè ivi si ha anche riguardo all' espressione della distanza fra due punti dati.

Questa osservazione è importante per que' studenti che amano di fare delle applicazioni di questi principj.

§. III. *Dell' equazione del piano e delle sue combinazioni con le equazioni del punto e della retta.*

296. In quella guisa che la posizione di una linea retta sopra di un piano vien fissata da un' equazione di primo grado fra le coordinate x, y, di ciascuno de' suoi punti riferiti a due assi, così vedremo che vien determinata la posizione di un piano, riferito ad altri tre piani, per mezzo di un' equazione di primo grado in x, y, z; rappresentando queste variabili le distanze di ciascun punto del piano dai tre piani coordinati.

Siano DB, DC (fig. 174) *le traccie* di un qualunque piano, cioè le intersecazioni di questo piano con due dei piani coordinati, (che esser possono indifferentemente rettangolari o obliqui).

Fra i diversi modi di concepire una *superficie piana*, ve ne è uno che consiste nel riguardarla come *generata*, *dal moto di una retta indefinita che scorre parallelamente a se stessa lungo un altra retta*, *similmente indefinita*.

Così, per esempio, se per i diversi punti della retta DB, c' imagineremo una serie di altre rette D'C', D''C'', . . . , parallele a DC è evidente che questa serie di rette apparterranno al piano da noi preso in considerazione; e che perciò questo piano può riguardarsi come generato dal moto della DC lungo la traccia DB, in modo da conservarsi sempre parallela alla sua primitiva direzione.

Questa proprietà caratteristica esponiamola coll' analisi.

Siccome la retta DB si trova intieramente nel piano delle xz, le sue equazioni hanno (§ 285) la forma $y=o$, $z=mx+p$. . . . (1).

Per una ragione analoga, le equazioni della traccia DC sono

$$x=o,\quad z=ny+p. \;.\;.\;.\;.\; (2).$$

(Si suppongono risolute le (1) e (2) rapporto a z, attesochè le due traccie devono passare per un punto D, per il quale la z resta comune ai due secondi membri di queste equazioni).

Ciò posto, consideriamo la traccia DC in una qualunque situazione, D'C', per esempio; avremo necessariamente (§ 288), per le equazioni di questa retta parallela a DC,

$$x=\alpha,\quad z=ny+\beta. \;.\;.\;.\;.\; (3);$$

ove α, β, sono quantità *costanti* per tutti i punti di una stessa posizione D'C' della generatrice, ma *variabili* da una posizione ad un' altra D''C''.

Ci resta ancora ad esprimere che la generatrice incontrà in tutte le sue posizioni la traccia DB; e, perciò, bisogna (§ 289) scrivere coll' analisi che le equazioni (1) e (3) hanno luogo nel tempo stesso; ciò che ci darà una relazione fra le indeterminate α, β, e le quantità cognite m, n, p. Combiniamo dunque insieme queste quattro equazioni.

La seconda delle equazioni (3), a cagione della prima delle equazioni (1), diviene $z=\beta$.

Ponendo i due valori $x=\alpha$, $z=\beta$ nella seconda delle (1), otterremo, per la relazione richiesta

$$\beta=m\alpha+p. \;.\;.\;.\; (4).$$

Osserviamo adesso che, da ciascuna posizione della generatrice, le equazioni (3), e l' equazione (4) devono restare addempite simultaneamente; dunque (n.° 84), eliminando fra queste equazioni le indeterminate α, β, l' equazione risultan-

te in x, y, z, e quantità cognite, apparterrà puranche a tutti i punti del piano.

Ora, le equazioni (3) dandoci

$\alpha = x$, $\beta = z - ny$, la (4) diverrà

$z - ny = mx + p$; ovvero

$$z = mx + ny + p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

E questa è, in generale, l'equazione che esprime la posizione di un piano nello spazio, e ne è, per dir così *la rappresentazione analitica.*

Per idearsi come questa equazione rappresenti ciascun punto della superficie piana, supponiamo che, per le variabili x, y, siasi preso un sistema di valori $x = \mathrm{A}d'$, $y = d'c'$. Se dal punto c' s' innalzi la $c'\mathrm{E}'$ perpendicolare al piano delle xy, ed eguale al corrispondente valore di z dedotto dalla (5), il punto E', così determinato, apparterrà al piano, e non potrà appartenere che ad esso.

Un consimile raziocinio ha luogo per altri valori attribuiti ad x ed y.

N. B. Fra tutti i mezzi, che sogliono impiegarsi per trovare l'equazione del piano, abbiamo preferito il precedente; primieramente, perchè ha il vantaggio di essere indipendente dall'inclinazione degli assi coordinati; poi, perchè viene applicato alla ricerca delle equazioni di altre superfici la di cui generazione offre dell' analogia con quella del piano. Ne vedremo in seguito degli esempj.

297. Le costanti m, n, p, che entrano nell'equazione del piano, si definiscono facilmente. Le quantità m ed n, altro non sono che *le tangenti degli angoli* che formano le tracce DB, DC, con gli assi delle x e delle y. In quanto poi alla quantità p, vien chiamata la z all'origine; e *questa è la distanza dell' origine dal punto ove il piano incontra l' asse delle* z.

Allorchè il piano passa per l' origine, è $p = o$, e l' equazione si riduce a

$$z = mx + ny$$

che resta infatti verificata da $x=o$, $y=o$, $z=o$.

298. Adesso diremo, *reciprocamente*, che appartiene ad un piano ogni equazione di primo grado a tre variabili,

$$Ax + By + Cz + D = o.$$

In fatti, ne dedurremo,

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}.$$

Ora, se si hanno in vista due rette le di cui equazioni siano.

per la 1.ª, $y=o$, e $z = -\frac{A}{C}x - \frac{D}{C}$,

e per la 2ª, $x=o$, e $z = -\frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$,

potremo riguardare queste rette come le traccie di un piano sopra quelli delle xz e delle yz; e, volendosi l'equazione di questo piano, atteso il metodo del *n.* 296, si troverà necessariamente

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}, \quad \text{ovvero}$$

$$Ax + By + Cz + D = o \quad . \; . \; . \; (1).$$

Dunque, reciprocamente, ec.

N. B. Benchè l'equazione $z = mx + ny + p$ non racchiuda che tre costanti, mentre che la (1) ne racchiude *quattro*, pure non cessa di essere così generale come la (1), il di cui primo membro può sempre dividersi per uno de' suoi coefficienti. Ma noi riguarderemo quasi sempre l'equazione del piano sotto la forma (1), e perchè è più simmetrica, ed inoltre perchè, determinato che sarà un piano

mediante certe condizioni, siccome la (1) includerà una *costante arbitraria* di più della

$$z = mx + ny + p,$$

potremo trarne profitto per introdurre delle simplificazioni nei calcoli.

Questà è un' osservazione utilissima.

Facciamo successivamente $x = o$, $y = o$, $z = o$, nella $Ax + By + Cz + D = o$; ed avremo

per $x = o$, $By + Cz + D = o$,

per $y = o$, $Ax + Cz + D = o$,

per $z = o$, $Ax + By + D = o$;

e sono queste le equazioni delle traccie del piano sopra i tre piani delle yz, xz e delle xy.

Supponendo nel tempo stesso $x = o$, $y = o$, otterremo la $z = -\frac{D}{C}$, che ci dà le coordinate del punto ove il piano incontra l' asse delle z.

Così da $x = o$, $z = o$, si otterrebbe $y = -\frac{D}{B}$,

da $y = o$, $z = o$, ... $x = -\frac{D}{A}$,

che sarebbero le coordinate dei punti ove il piano incontra l'asse delle y e l'asse delle x.

299. Potrebbero farsi entrare nell' equazione del piano le distanze dall' origine a questi tre punti d' intersecazione, e l' equazione prenderebbe allora una elegantissima forma.

Poniamo, infatti,

$$AB = -\frac{D}{A} = q, \quad AC = -\frac{D}{B} = r, \quad AD = -\frac{D}{B} = s;$$

ne risulterà $A=\frac{D}{q}$, $B=\frac{D}{r}$, $C=\frac{D}{s}$,

onde, sostituendo nell' equazione del piano e riducendo $rs.x+qs.y+qr.z=qrs$;

equazione analoga a quella già ottenuta per la linea retta (§ 15), e per le equazioni dell' ellisse e dell' iperbole, riferite ai loro assi.

Dessa non racchiude, come la $z=mx+ny+p$, che tre costanti; ma di più è simetrica.

300. Occupiamoci adesso della risoluzione di una serie di quesiti relativi al punto, alla linea retta, ed al piano, quesiti che, con quelli già discussi (§ 286 . . . .) costituiscono ciò che s' intende sotto il nome di *preliminari* della Geometria analitica a tre coordinate.

I. Quesito. *Far passare un piano per tre punti dati.*

Indichiamo con (x', y', z'), (x'', y'', z'') (x''', y''', z''') le coordinate dei tre punti, e con

$$Ax+By+Cz+D=o \quad . \; . \; . \quad (1)$$

l' equazione del piano cercato; A, B, C, D, sono le costanti che devonsi determinare.

Poichè il piano resta assoggettato a dover passare per i tre punti, la sua equazione deve verificarsi, allorchè vi si sostituiscono successivamente le x, y, z, in luogo delle coordinate di ciascuno di questi punti: perciò, avremo le tre relazioni

$$Ax'+By'+Cz'+D=o,$$

$$Ax''+By''+Cz''+D=o, \quad Ax'''+By'''+Cz'''+D=o,$$

che possono trasformarsi come siegue

$$\frac{A}{D}x'+\frac{B}{D}y'+\frac{C}{D}z'=-1,$$

$$\frac{A}{D}x'' + \frac{B}{D}y'' + \frac{C}{D}z'' = -1,$$

$$\frac{A}{D}x''' + \frac{B}{D}y''' + \frac{C}{D}z''' = -1.$$

Applicando a queste equazioni le formole di primo grado a tre incognite (t.° 1.° p. 176), ed osservando che il coefficiente D , essendo totalmente arbitrario, può essere fatto eguale alla quantità che serve di denominatore comune alle tre espressioni di $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, troveremo , a calcolo effettuato ,

$$D = x'y''z''' - x'z''y''' + z'x''y''' - y'x''z''' + y'z''x''' - z'y''x''',$$

$$A = -y''z''' + z''y''' - z'y''' + y'z''' - y'z'' + z'y'',$$

$$B = -x'z'' + x'z'' - z'x'' + x''z''' - z''x''' + z'x''',$$

$$C = -x'y'' + x'y''' - x''y''' + y'x'' - y'x''' + y''x'''.$$

Ora , per ottenere l'equazione richiesta, basterebbe sostituire nella (1) questi valori.

301. II. Quesito. *Far passare un piano per un punto e per una retta data.*

Siano x' , y' , z', le cordiuate del punto

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha, \\ y = bz + \beta, \end{array}\right\} \ldots . (1) \text{ le equazioni della retta ;}$$

quella del piano cercato avrà la forma

$$Ax + By + Cz + D = o \ldots . (2).$$

E siccome questo piano deve passare per il punto (x', y' , z'), avremo per prima relazione

$$Ax' + By' + Cz' + D = o \ldots . (3);$$

e , sottraendo dalla (2) la (3) , risulterà la

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=o \quad . \; . \; . \; (4);$$

in cui avremo la forma caratteristica dell' equazione di un piano che passa per un punto dato della quale faremo un uso frequente.

Esprimiamo adesso, coll' analisi, che la retta data si trova tutta intera nel piano cercato; per il che, basta di scrivere che le coordinate x, y, z, di tutti i punti della retta verificano l'equazione del piano. Ora, sostituendo nella (2), in luogo di x ed y, i loro valori dedotti dalle equazioni (1), otterremo

$$A(az+\alpha)+B(bz+\beta)+Cz+D=o;$$

ovvero, effettuando i calcoli, ed ordinando,

$$(Aa+Bb+C)z+A\alpha+B\beta+D=o.$$

Ma questa equazione deve verificarsi, indipendentemente da qualunque valore particolare si attribuisca a z; e perciò ciascuna delle quantità $Aa+Bb+C$, $A\alpha+B\beta+D$ dev' esser *nulla* separatamente; cosicchè avremo le due nuove relazioni

$$Aa+Bb+C=o \quad . \; . \; . \; (5)$$

$$A\alpha+B\beta+D=o \quad . \; . \; . \; (6)$$

per esprimere che la retta è compresa tutta intera nel piano.

Sottraendo la relazione (6) dalla (3), otterremo

$$A(x'-\alpha)+B(y'-\beta)+Cz'=o \quad . \; . \; . \; (7)$$

che non contiene più D, e che può sostituirsi alla (6).

Si riduce dunque il quesito a trovare i valori di A, B, C, o, piuttosto, dei rapporti $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, mediante le due relazioni

$$\frac{A}{C}a+\frac{B}{C}b+1=o,\quad \frac{A}{C}(x'-\alpha)+\frac{B}{C}(y'-\beta)+z'=o.$$

Ora, otteniamo dalla eliminazione

$$1.^o\ \frac{A}{C}=\frac{y'-\beta-bz'}{b(x'-\alpha)-a(y'-\beta)},$$

$$2.^o\ \frac{B}{C}=-\frac{x'-\alpha-az'}{b(x'-\alpha)-a(y'-\beta)};$$

e, siccome può disporsi ad arbitrio di uno dei tre coefficienti A, B, C, basterà porre

$C=b(x'-\alpha)-a(y'-\beta)$, per avere

$$A=y'-\beta-bz',\quad B=-(x'-\alpha-az')$$

d' onde, sostituendo nella (3), otterremo

$$(y'-\beta-bz')(x-x')-(x'-\alpha-az')(y-y')$$
$$+[b(x'-\alpha)-a(y'-\beta)](z-z')=o,$$

per l' equazione richiesta.

302. *Osservazione*. Nel precedente quesito abbiamo fissate due relazioni

$$Aa+Bb+C=o,\quad A\alpha+B\beta+D=o,$$

che esigono qualche attenzione, perchè sono di frequente uso nella Geometria analitica.

Riprendiamo le equazioni della retta e del piano,

$$x=az+\alpha,\quad y=bz+\beta,\quad Ax+By+Cz+D=o;$$

e proponiamoci di determinare il punto ove la retta incontra il piano.

Siccome abbiamo tre equazioni fra x, y, z, col sostituire nella terza ad x ed y i loro valori dedotti delle due prime; otterremo

$(Aa+Bb+C)z+A\alpha+B\beta+D=o$, onde

$$z = -\frac{A\alpha + B\beta + D}{Aa + Bb + C},$$

$$x = \alpha - \frac{a\,(A\alpha + B\beta + D)}{Aa + Bb + C}$$

$$= \frac{\alpha\,(Aa + Bb + C) - a\,(A\alpha + B\beta + D)}{Aa + Bb + C},$$

$$y = \beta - \frac{b\,(A\alpha + B\beta + D)}{Aa + Bb + C}$$

$$= \frac{\beta\,(Aa + Bb + C) - b\,(A\alpha + B\beta + D)}{Aa + Bb + C}$$

Ciò posto, volendosi esprimere che *la retta ed il piano sono paralleli*, conviene scrivere che i valori di x, y, z, corrispondenti al punto d'intersecazione, sono *infiniti*; ciò che si fà ponendo $Aa + Bb + C = o$; poichè allora questi valori divengono

$$z = -\frac{A\alpha + B\beta + D}{o}, \quad x = -\frac{a\,(A\alpha + B\beta + D)}{o},$$

$$y = -\frac{b\,(A\alpha + B\beta + D)}{o}.$$

Se invece della condizione $Aa + Bb + C = o$, si supponesse $A\alpha + B\beta + D = o$, i valori di x, y, z, si ridurrebbero a $z = o$, $x = \alpha$, $y = \beta$.

Ora, si scorge facilmente che, il punto corrispondente a questo sistema di coordinate, è quello ove la retta incontra il piano delle xy; poichè, se nelle equazioni della retta si ponga $z = o$, ne risulta $x = \alpha$, $y = \beta$.

Supponiamo adesso che siasi fatto simultaneamente

$$Aa + Bb + C = o, \quad A\alpha + B\beta + D = o;$$

i valori di x, y, z, si ridurranno alla forma $\frac{o}{o}$, segno dell' *indeterminazione*; ciò che prova che la retta si trova allora tutta intera nel piano.

Può concludersi da ciò che, delle due relazioni di sopra, la prima esprime solamente che *la retta ed il piano sono paralleli*; la seconda, che il piano *passa per un determinato punto della retta* (quello ove la retta penetra il piano delle xy); e che, ambedue congiuntamente, esprimono che *la retta ed il piano si confondono*.

303. III.° Quesito. *Dato un piano ed un punto fuori di questo piano*, si voglia:

1.° *Calare dal punto una perpendicolare sul piano.*

2.° *Trovare la lunghezza di questa perpendicolare*, cioè, *la distanza del punto dal piano dato.*

Siano x, y, z, le coordinate di questo punto, ed

$$Ax+By+Cz+D=o. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

l'equazione di un piano che si suppone di posizione cognita.

Le equazioni della retta cercata avranno (§ 287) la forma

$$x-x'=a(z-z'), \quad y-y'=b(z-z'). \quad . \quad . \quad (2),$$

ed a, b, saranno costanti da determinarsi.

A tale oggetto, dovremo qui far uso di uno dei principj della Geometria descrittiva, cioè: supporre che se una retta è perpendicolare ad un piano nello spazio, *la projezione della retta sopra uno dei piani coordinati, è perpendicolare alla traccia del piano dato sopra lo stesso piano coordinato.*

In fatti, consideriamo, per esempio, la projezione della retta e la traccia del piano sopra quello delle xz.

Imaginiamo, mediante la retta, il piano che la

projetta sopra il piano delle xz; la traccia di questo *piano projettante* altro non è che la projezione della retta. Ora questo piano, passando per una retta perpendicolare al piano dato, è esso stesso perpendicolare al piano dato; altronde poi è anche perpendicolare al piano delle xz; d'onde siegue che la intersecazione comune del piano dato e del piano delle xz, cioè la traccia del piano dato è perpendicolare al piano projettante; dunque *questa traccia è perpendicolare alla projezione della retta*, poichè la projezione si trova nel piano projettante, e passa per il punto ove il piano projettante e la traccia si tagliano.

Lo stesso raziocinio potrebbe applicarsi alla projezione della retta ed alla traccia del piano sopra quello delle yz.

Ciò posto, se, per ottenere *le traccie* del piano dato, si farà $y=o$, poi $x=o$ nella (1), avremo le

$$Ax+Cz+D=o\,,\quad By+Cz+D=o\,,$$

capaci della forma

$$x=-\frac{C}{A}z-\frac{D}{A},\quad y=-\frac{C}{B}z-\frac{D}{B}\;.\;.\;.\;(3)$$

Ora, poichè le rette espresse dalle equazioni (2) devono essere rispettivamente perpendicolari alle rette espresse dalle (3), bisogna (§ 25) che fra i coefficienti di z esistano le relazioni

$$a\times-\frac{C}{A}+1=o\,;\text{ onde }a=\frac{A}{C}\,,\text{ ovvero, }A=aC\,,$$

$$b\times-\frac{C}{B}+1=o\,;\text{ onde }b=\frac{B}{C}\,,\text{ ossia , }B=bC.$$

Questi valori di a, b, sostituiti nelle (2), ci danno per le equazioni della perpendicolare,

$$x-x'=\frac{A}{C}(z-z')\,,\;y-y'=\frac{B}{C}(z-z')\;.\;.\;.\;.\;(4).$$

Adesso, per risolvere la seconda parte del problema, osserveremo che, attesa l'espressione (§ 281), che ci dà la distanza fra due punti, basta determinare i valori di $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, idonei a soddisfare nel tempo stesso alle (1) e (4), e sostituir poi questi valori nell'espressione della distanza; poichè, da tale eliminazione, si otterranno necessariamente le differenze fra le coordinate del punto ove la perpendicolare incontra il piano e quelle del punto dato

A tale oggetto, sottoponendo la (1) alla seguente trasformazione, coll'aggiungere al primo membro

$-Ax'-By'-Cz'+Ax'+By'+Cz'$, e col porre

$Ax'+By'+Cz'+D=D'$ . . , (5); avremo

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+D'=o.$$

Ora se qui, in luogo di $x-x'$, $y-y'$, porremo i loro valori (4), troveremo

$$(A^2+B^2+C^2)(z-z')+D'C=o, z-z'=-\frac{D'C}{A^2+B^2+C^2},$$

e perciò $$x-x'=-\frac{D'A}{A^2+B^2+C^2}$$

$$y-y'=-\frac{D'B}{A^2+B^2+C^2}.$$

Ma, chiamata P la perpendicolare richiesta, dal (§ 281) abbiamo

$$P=\sqrt{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]};$$

dunque $$P=\frac{D'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}=\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

(V. § 28 riguardo al doppio segno del radicale).

304. *Casi particolari.* I.° Il punto dato può essere l'origine stessa delle coordinate. In tal caso abbiamo $x'=o$, $y'=o$, $z'=o$;

e l' espressione della perpendicolare si riduce a

$$P=\frac{D}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}.$$

Il piede poi della normale ha per coordinate

$$x=-\frac{AD}{A^2+B^2+C^2},\qquad y=-\frac{BD}{A^2+B^2+C^2},$$

$$z=-\frac{CD}{A^2+B^2+C^2}.$$

2.° Se il punto dato si trova sopra il piano, le sue coordinate devono verificare le equazioni del piano, cioè deve aversi

$$Ax'+By'+Cz'+D=o\,;\quad \text{onde}\quad P=o.$$

305. IV. Quesito. Reciprocamente, *dato un punto ed una retta nello spazio, condurre per il punto un piano perpendicolare alla retta, e trovare la lunghezza della distanza dal punto alla retta.*

Le equazioni della retta data siano

$$x=az+\alpha,\quad y=bz+\beta\ \ldots\ (1),$$

ed x', y', z', le coordinate del punto.

L' equazione del piano cercato avrà (301) la forma $A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=o\ \ldots\ (2)$.

Ma, per ipotesi, la retta ed il piano sono perpendicolari fra loro. Dunque (§ 303) fra i coefficienti, A, B, C, ed a, b, vi saranno le relazioni

$$A=aC,\qquad B=bC\,;$$

onde, sostituendo nella (2), e dividendo per C,

$$a(x-x')+b(y-y')+z-z'=o\ \ldots\ (3),$$

avremo cioè l'equazione del piano cercato.

Per ottenere adesso la distanza del punto (x', y', z') dal punto ove il piano incontra la retta,

basta cercare i valori di $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ atti a soddisfare nel tempo stesso alle (1) e (3), e portar poi questi valori nella generale espressione della distanza fra due punti dati.

Per effettuare questa trasformazione, daremo alle (1) la forma

$$x-x'=a(z-z')+\alpha-x'+az'$$

$$y-y'=b(z-z')+\beta-y'+bz' \quad . \; . \; . \; (4),$$

che è analoga a quella del n.° 27.

Ciò posto, sostituendo ad $x-x'$, $y-y'$ i loro valori nella equazione (3) otterremo

$$(a^2+b^2+1)(z-z')+a(\alpha-x'+az')+b(\beta-y'+bz')=0,$$

onde,

$$z-z'=\frac{a(x'-\alpha)+b(y'-\beta)+z'}{a^2+b^2+1}-z'=\frac{N}{a^2+b^2+1}-z',$$

facendo, per semplificare,

$$N=a(x'-\alpha)+b(y'-\beta)+z' \quad . \; . \; . \; (5).$$

Questo valore di $z-z'$ portato nelle (4), ci darà

$$x-x'=\frac{Na}{a^2+b^2+1}-az'+\alpha-x'+az'=\frac{Na}{a^2+b^2+1}-(x'-\alpha)$$

$$y-y'=\frac{Nb}{a^2+b^2+1}-bz'+\beta-y'+bz'=\frac{Nb}{a^2+b^2+1}-(y'-\beta).$$

Addizionando i quadrati di $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, ed osservando 1.° Che le prime parti innalzate al quadrato danno per somma $\frac{N^2}{a^2+b^2+1}$; 2.° Che la somma dei doppj prodotti si riduce,

(5), a $\frac{-2N^2}{a^2+b^2+1}$; si trova finalmente, per la più semplice espressione della distanza dal punto alla retta data,

$$P=\sqrt{[(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+z'^2-\frac{N^2}{a^2+b^2+1}]}.$$

306. *Conseguenza*. Se uniremo il punto (x', y', z') con il punto ove la retta è incontrata dal piano che gli è perpendicolare, (punto le di cui coordinate si rappresenteranno per ora con x'', y'', z''), è evidente che questa retta di congiunzione è perpendicolare alla retta data. Ma le equazioni di questa retta hanno (§ 287) la forma

$$x-x'=\frac{x''-x'}{z''-z'}(z-z'),\quad y-y'=\frac{y''-y'}{z''-z'}(z-z');$$

ed i rapporti $\frac{x''-x'}{z''-z'}$, $\frac{y''-y'}{z''-z'}$ altro non sono che i rapporti dei valori di $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, trovati nel n.° precedente. Dunque, effettuando questa sostituzione, si otterranno *le equazioni della perpendicolare calata da un punto sopra una retta nello spazio*; quesito di cui fu già indicata una prima soluzione (§ 294).

Non ultimeremo questo calcolo perchè facile, e poco elegante nel suo risultato.

307. V. Quesito. *Per un punto dato nello spazio condurre un piano parallelo ad un' altro.*

Prima di risolvere un tal problema, fisseremo le condizioni analitiche che esprimono che due piani sono paralleli.

Le equazioni di due piani dati nello spazio siano

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

$$A'x+B'y+C'z+D'=o.$$

Se questi piani son paralleli, dovranno essere ancor parallele le loro traccie sopra il piano delle xz e sopra quello delle yz. Ma, abbiamo (§ 298) per le equazioni di queste tracce,

$Ax+Cz+D=o$, $By+Cz+D=o$ per il 1. piano,

$A'x+C'z+D'=o$, $B'y+C'z+D'=o$ per il 2.

Ed affinchè siano respettivamense paralleli, dev' essere (§ 288) $\frac{A}{C}=\frac{A'}{C'}$ e $\frac{B}{C}=\frac{B'}{C'}$;

d' onde si deduce ancora $\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}$.

Siano x', y', z', le coordinate del punto dato. Essendo l' equazione del 1. piano $Ax+By+Cz+D=o$, quella del 2.°, il quale vien sottoposto a passare per il punto (x', y', z') avrà la forma

$$A'(x-x')+B'(y-y')+C'(z-z')=o;$$

ma, per ipotesi, i due piani devono esser paralleli; avremo dunque

$$\frac{A'}{C'}=\frac{A}{C},\ \frac{B'}{C'}=\frac{B}{C},\ \text{onde}\ A'=\frac{A}{C}.C',\ B'=\frac{B}{C}.C'.$$

Da questi valori di A', B', posti nella precedente equazione, e dalla divisione per C', risulterà per la richiesta equazione

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=o,$$

in cui i tre primi coefficienti sono li stessi di quelli dell' equazione del piano dato, non essendovi che la z dall' origine (§ 297) che sia *differente*.

Se il punto per cui vuò farsi passare il piano pa-

rallelo, è l'origine stessa delle coordinate, avremo allora,

$$x'=o, \quad y'=o, \quad z'=o;$$

e l'addotta equazione si ridurrà ad

$$Ax+By+Cz=o. \; . \; . \; . \; (\text{ Ved. § } 297).$$

308. VI. Quesito. *Trovare le equazioni della intersecazione comune di due piani.*

Le equazioni dei due piani dati siano

$$Ax+By+Cz+D=o. \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

$$A'x+B'y+C'z+D'=o. \; . \; . \; . \; (2).$$

Osserveremo prima che una retta nello spazio è così bene determinata dalle equazioni di due piani qualunque che la racchiudono, come da quelle delle sue projezioni, equazioni che altro non sono (§ 284) che quelle dei due piani perpendicolari, l'uno al piano delle xz, e l'altro al piano delle yz

Ma può abbisognare, per certi problemi la cognizione delle *equazioni delle projezioni.*

Ora, se si elimina y fra le (1) e (2), l'equazione risultaute in x, z, apparterrà ad un piano perpendicolare al piano delle xz e che passa per la retta; dunqne sarà essa l'equazione della projezione della retta sopra il piano delle xz.

Vale lo stesso raziocinio per la projezione sul piano delle yz.

Dall'effettuare i calcoli, risulterà,

1.° Per la projezione sul piano delle xz,

$$(AB'-BA')\,x+(CB'-BC')\,z+DB'-BD'=o$$

2.° Per la projezione sul piano delle yz,

$$(AB'-BA')\,y+(AC'-CA')\,z+AD'-DA'=o.$$

Dall'eliminazione di z risulterebbe egualmente l'equazione della projezione sul piano delle xy.

309. VII. Quesito. *Dati due piani nello spazio, trovar l'angolo che formano fra loro.*

Il mezzo, che si presenta a primo aspetto per la risoluzione del quesito, consisterebbe nel cercare; 1.° Le equazioni delle projezioni dell' intersecazione comune di due piani; 2.° l' equazione di un piano perpendicolare a questa intersecazione; 3.° quelle delle *traccie* di questo piano sopra i due piani dati; 4.° finalmente, l'angolo formato da queste tracce. Ma si comprende facilmente che questi calcoli, quantunque eseguibili con i principj già stabiliti, sarebbero assai laboriosi.

Ecco un' altro mezzo più semplice e più elegante.

Supponiamo che le rette OB, OC (fig. 175) rappresentino nello spazio le intersecazioni di due piani dati con un terzo che loro sia perpendicolare. Se dal punto O s' innalzino le OB', OC', rispettivamente perpendicolari ai due piani, si vede che queste rette saranno situate nel terzo piano BOC di cui si è ora parlato.

Ora dall' eguaglianza dei due angoli retti BOB', COC', risulta necessariamente B'OC'=BOC; cosichè *l' angolo formato da due rette condotte in un punto della intersecazione comune di due piani perpendicolarmente a questi due piani è eguale all' angolo che questi due piani fanno fra loro.*

Ciò posto, siano le equazioni dei due piani

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A'x+B'y+C'z+D'=0.$$

Quelle delle due rette che sono ad essi respettivamente perpendicolari, qualunque sia la posizione di queste rette nello spazio, avranno la forma

$$\left.\begin{array}{l} x=az+\alpha, \\ y=bz+\beta, \end{array}\right\} \text{ ed } \left\{\begin{array}{l} x=a'z+\alpha', \\ y=b'z+\beta', \end{array}\right\}$$

avendo (§ 303) a, b, a', b' per valori

$$a=\frac{A}{C},\ b=\frac{B}{C},\quad \text{ed}\quad a'=\frac{A'}{C'},\ b'=\frac{B'}{C'}.$$

Ma abbiamo (§ 290) per l'angolo delle due rette

$$\cos V=\frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{[(a^2+b^2+1)(a'^2+b'^2+1)]}}.$$

Dunque, sostituendo ad a, a', b, b', i loro valori, otterremo, a riduzione effettuata,

$$\cos V=\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{[(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)]}}$$

espressione indipendente da D, D'; come dev' essere, attesochè tutti i piani, paralleli ai due piani dati, formano fra loro l' angolo stesso di questi qui.

Il radicale, che racchiude questa espressione, rende il segno di cos V *indeterminato*, perchè, in realtà, i due piani fanno fra loro due angoli, acuto l' uno, ottuso l' altro; indeterminazione che và a cessare quando già si sappia di quale specie è l' angolo cercato.

Esaminiamo qualche caso particolare.

310. Se i due piani sono *fra loro perpendicolari*, essendo cos $V=o$, avremo da tal condizione

$$AA'+BB'+CC'=o,$$

Suppongansi i due piani *paralleli fra loro*, nel qual caso sarà cos $V=1$; rendendo equale all' unità il secondo membro dell' addotta formola, e svilupnando, troveremo, a riduzione effettuata, l' equazione

$$(AB'-BA')^2+(AC'-CA')^2+(BC'-CB')^2=o,$$

che include necessariamente le condizioni

$AB'-BA'=o$, $AC'-CA'=o$, $BC'-CB'=o$; cioè

$$\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'},\ \frac{A}{C}=\frac{A'}{C'},\ \ldots\ldots;$$

condizioni già ottenute n.° 307.

311. Facciamo adesso coincidere uno dei due piani con ciascuno dei tre piani coordinati. Otterremo, con tal mezzo, i coseni degli angoli che forma un piano dato con i piani di projezione.

Supponiamo, per esempio, che il secondo piano sia il piano delle xy. Siccome la $A'x+B'y+C'z+D'=o$ deve ridursi a $z=o$, conviene che sia

$$A'=o, \quad B'=o, \quad D'=o,$$

e che il valore di cos V si riduca a

$$\cos(xy)=\frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} \ldots (1)$$

[cos (xy), cos (xz), cos (yz) sono indicazioni che addotteremo per esprimere i coseni degli angoli formati da un piano con i piani coordinati].

Con un ragionamento analogo si otterrebbe, per gli angoli che il primo piano forma con gli altri due piani coordinati,

$$\cos(xz)=\frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} \ldots (2),$$

$$\cos(yz)=\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} \ldots (3).$$

Innalzate al quadrato le (1), (2), (3), e addizionate, avremo

$$\cos^2(xy)+\cos^2(xz)+\cos^2(yz)=1,$$

relazione analoga alla già trovata (§ 292) fra i coseni degli angoli che fà una retta con i tre assi.

Così, indichiamo con cos (xy)', cos (xz)', cos (yz)' i coseni degli angoli che un secondo piano nello spazio fa con i tre piani coordinati; ed avremo egualmente

$$\cos(xy)'=\frac{C'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}},$$

$$\cos(xz)' = \frac{B'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}},$$

$$\cos(yz)' = \frac{A'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}},$$

Moltiplicando queste tre espressioni rispettivamente con quelle di $\cos(xy)$, $\cos(xz)$, $\cos(yz)$, ed avendo riguardo al valore di $\cos V$, avremo

$$\cos(xy).\cos(xy)' + \cos(xz).\cos(xz)' + \cos(yz).\cos(yz)' = \cos V.$$

Finalmente, se i due piani sono perpendicolari fra loro, dovremo avere

$$\cos(xy).\cos(xy)' + \cos(xz).\cos(xz)' + \cos(yz).\cos(yz)' = o.$$

Questi risultati sono tutti utili nel problema generale della trasformazione delle coordinate in tre dimensioni.

312. VIII. Quesito. *Trovar l' angolo di una retta e di un piano nello spazio.*

Se da un qualunque punto della retta si cali una perpendicolare sopra il piano dato, e si unisca il piede di questa perpendicolare con il punto ove la retta incontra il piano sappiamo (t.° 2.° § 85), che la linea di unione è *la projezione della retta sopra il piano*. Si chiama *angolo di una retta e di un piano* quello che forma la retta con la sua projezione sopra il piano. Ciò posto, è evidente che quest' angolo è il *complemento* di quello che fa la stessa retta con la perpendicolare calata sopra il piano.

Siano dunque le equazioni della retta data

$$x = az, \quad y = bz + \beta, \quad \text{ed}$$

$Ax + By + Cz + D = o$ quella del piano.

Le equazioni di una retta perpendicolare a questo piano avranno la forma

$$x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \beta',$$

avendo (§ 303) a', b' per valori

$$a' = \frac{A}{C}, \quad b' = \frac{B}{C}.$$

Ma, (§ 290), per l'angolo di queste due rette, abbiamo

$$\cos V = \frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{[(a^2 + b^2 + 1)(a'^2 + b'^2 + 1)]}}$$

Dunque, sostituendo ad a', b', i loro valori, otterremo, per il seno dell'angolo cercato,

$$\text{sen } V = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{[(a^2 + b^2 + c^2)(A^2 + B^2 + C^2)]}}.$$

Dalla retta parallela al piano, avendosi sen $V = o$, risulterà

$$Aa + Bb + C = o,$$

relazione fissata n.° 303.

313. *Riflessione generale*. Tali sono i principj con i quali possono risolversi i quesiti di qualunque specie relativi alla linea retta ed al piano nello spazio. Tuttavìa non dobbiamo obbliare che, quantunque alcuni dei risultati già ottenuti siano indipendenti dall'inclinazione degli assi, pure il loro maggior numero suppone gli assi rettangolari. Cosichè i quesiti ne' quali si è dovuto valutare o la distanza fra due punti, o l'angolo di due rette e perciò la condizione di perpendicolarità di due rette o di due piani, ci condurrebbero tutti ai risultati molto più complicati nella ipotesi degli assi obliqui.

CAP. VI.

Delle superfici curve, ed in particolare delle Superfici del secondo grado.

Nozioni Preliminari.

314. Data la forma e la posizione nello spazio di una superficie curva, se, dopo di aver tradotto algebricamente una delle sue proprietà caratteristiche, si giunga alla relazione $F(x, y, z) = o$ fra le coordinate di ciascuno de' suoi punti, questa equazione prende il nome di *equazione della superficie*, e la determina completamente; poichè, prendendo valori arbitrarj per due delle variabili, si deduce dalla equazione uno o più valori della terza variabile; ed il punto corrispondente a ciascun sistema di coordinate si trova necessariamente sopra la superficie, poichè, per ipotesi, l'equazione conviene a tutti i punti, e non conviene che ai punti di questa superficie.

315. *Reciprocamente, ogni equazione*

$$F(x, y, z) = o. \quad . \quad . \quad (1),$$

dalle di cui variabili x, y, z, vengono espresse le distanze da tre piani rettangolari o obbliqui, riguardate parallelamente alle intersecazioni di questi piani; *ha per luogo geometrico una certa superficie*; la di cui natura e forma dipendono dal la maniera con cui le variabili sono combinate fra loro e con altre quantità costanti, date *a priori.*

Per dimostrare a rigore questa seconda proposizione, esaminiamo una seconda equazione

$$F'(x, y, z) = o. \quad . \quad . \quad (2)$$

e rintracciamo il luogo di tutti i punti, le coordinate dei quali verificano ad un tempo le (1) e (2).

Primieramente eliminando, fra queste, una delle tre variabili, per es. y la risultante

$$f(x, y) = o. \ . \ . \ . \ (3)$$

esprimerà una certa relazione fra le coordinate dei punti situati nel piano delle xz, ed apparterrà, in conseguenza (§ 284), ad una linea curva situata in questo piano. Ma, imaginando che dai diversi punti di questa curva vengano condotte delle perpendicolari al piano delle xz, si formerà, nello spazio, una superficie (chiamata *superficie cilindrica*) per ciascun punto della quale le x e le z sono le stesse che quelle della curva; perciò la (3) conviene egualmente a tutti i punti di questa superficie, e non può convenire che a questi punti.

Similmente, l'equazione. . . $f'(y, z) = o$... (4), che risulta dalla eliminazione di x fra le (1) e (2), caratterizza tutti i punti di una superficie cilindrica, le di cui direttrici sono perpendicolari al piano delle yz, e che ha per base la curva rappresentata dalla (4).

Siegue di quì che il sistema delle equazioni (3) e (4), il quale può sostituirsi a quello delle equazioni (1) e (2), appartiene a tutti i punti che si trovano nel tempo stesso sopra le due superfici cilindriche, e, perciò, alla loro intersecazione comune che, in generale, è una linea curva. Dunque anche il luogo dei punti, le di cui coordinate soddisfano nel tempo stesso alle equazioni (1) e (2), è una linea; ciò che esige che i luoghi geometrici di queste equazioni siano *delle superfici*, e non *dei solidi*, come a primo aspetto potrebbe uno idearsi.

Dobbiamo osservare bensì che, se la (1), oltre le variabili x, y, z, contenesse una o più indeterminate, questa equazione ci fornirebbe altrettante superfici differenti quanti valori potrebbero darsi alle indeterminate; così che, in tal caso, il luogo geometrico sarebbe la riunione di una infinità di superfici, o di *strati* infinitamente sottili, che allora, propriamente parlando, formerebbero un solido.

316. Suppongasi ora che tre equazioni

$F(x, y, z)=o$, $F'(x, y, z)=o$, $F''(x, y, z)=o$,

esistano nel tempo stesso per differenti punti.

Siccome le due prime caratterizzano tutti i punti della linea d' intersecazione delle superfici espresse da queste equazioni, e la prima e la terza caratterizzano la linea d' intersecazione delle superfici che loro appartiene, ne siegue che le tre equazioni convenghino ai punti ove queste linee s' incontrano, cioè, a quelli che si trovano simultaneamente sopra le tre superfici, e si otterranno le coordinate di questi punti eliminando x, y, z, fra le proposte equazioni. Il numero dei punti comuni è eguale al numero dei sistemi dei valori reali di x, y, z, atti a verificare queste equazioni simultaneamente.

317. Potremo concludere dalle precedenti riflessioni,

1.° Che una sola equazione fra tre variabili x, y, z, determina analiticamente una superficie:

2.° Che il sistema di due equazioni in x, y, z, caratterizza una linea curva rappresentata ordinariamente sotto il nome *di curva a doppia curvatura* (quasi fosse della natura dell' una e dell' altra superficie rappresentate dalle due equazioni).

Questa stessa curva resta ancora determinata dalle equazioni di due delle sue projezioni; e queste sono (§ 315) le equazioni che ottengonsi eliminando successivamente y ed x fra le proposte equazioni:

3.° Che il sistema di tre equazioni in x, y, z, fissa la posizione di un certo numero di punti nello spazio; così che non è sempre necessario che si assegnino esplicitamente le coordinate di questi punti, ma bensì le equazioni di tre superfici sopra le quali essi si trovano situati.

Stabilite queste prime nozioni, occupiamoci della risoluzione di un problema analogo a quello per il quale fu fatta precedere la teoria delle curve di se-

condo grado; è questo della trasformazione delle coordinate a tre dimensioni.

§ I. *Trasformazione delle Coordinate nello spazio.*

318. *Data l' equazione di una superficie curva riferita ad assi rettangolari o obliqui, debba determinarsi l' equazione di questa stessa superficie riferita a nuovi assi colla stessa origine o con origine differente.*

Per risolvere tal quesito, dobbiamo procurare di esprimere le primitive ordinate x, y, z, in funzioni delle nuove x', y', z'; e poi, sostituendo questi valori nella primiera equazione, otterremo l' equazione richiesta.

Ora, qualunque siasi il metodo che si adopra, si conosce facilmente *a priori* che i valori di x, y, z in x', y', z', sono di primo grado e che hanno la forma

$$\left.\begin{aligned} x&=mx'+m'y'+m''z'+a,\\ y&=nx'+n'y'+n''z'+b,\\ z&=px'+p'y'+p''z'+c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1).$$

In fatti, devono essere valori tali, che, applicandoli al piano, non cessi l' equazione di questa superficie (§ 296) di essere di primo grado; ciò che non avrebbe luogo nel caso che qualchuna delle variabili x', y', z' fosse elevata alla 2ª, 3ª potenza.

Non prenderemo a determinare le costanti m, m', . . . , n, n' . . . , nel caso della maggior generalità; perchè le forme sono di poco uso; ci limiteremo in vece ai seguenti casi.

319 1.° CASO. *Passare da un sistema di coordinate rettangolari o oblique ad un sistema di coordinate parallele, di differente origine.*

Siano AX, AY, AZ (fig. 176) gli assi primitivi; ed A′X′, A′Y′, A′Z′ i nuovi, che supponiamo

paralleli ai primi, e prolungati fino al loro incontro con i piani delle yz, xz, xy; le parti A'B, A'C, A'D, rappresentano le coordinate della nuova origine A' riferita agli assi primitivi. Se da un qualunque punto M della superficie condurremo le coordinate MP, MQ, MR, queste rette traverseranno i piani $y'z'$, $x'z'$, $x'y'$ nei punti P', Q', R'; ed

avremo $\quad \mathrm{MP}=x$, $\mathrm{MQ}=y$, $\mathrm{MR}=z$, e poi

$$\mathrm{MP'}=x',\ \mathrm{MQ'}=y',\ \mathrm{MR'}=z',\ \text{e}$$

$$\mathrm{P'P}=\mathrm{A'B}=a,\ \mathrm{Q'Q}=\mathrm{A'C}=b,\ \mathrm{R'R}=\mathrm{A'D}=c\,;$$

d' onde le relazioni

$$x=x'+a,\quad y=y'+b,\quad z=z'+c.$$

Tali sono le formole per mezzo delle quali si passa da un qualunque sistema di coordinate ad un sistema di parallele.

I segni delle quantità a, b, c, fanno conoscere (§ 276) in quale degli *otto* angoli solidi formati dai tre assi primitivi, si trovi la nuova origine.

N. B. In tutto ciò che siegue supporremo che l' origine resti la stessa, poichè, se fosse diversa, converrebbe incominciare dal trasportare gli assi parallelamente a loro stessi colle formole addotte, e poi dovrebbe cangiarsi la direzione degli assi attorno della nuova origine.

320. 2.° CASO. *Passare da un sistema rettangolare ad un sistema obliquo colla stessa origine.*

Il metodo di cui ci prevarremo per ottenere le formole relative a questo nuovo caso, è fondato sulla seguente proposizione.

Siano LL', KK' (fig. 177) due rette indefinite situate o non situate in un medesimo piano. Caliamo da due punti A, B, della prima retta le Aa, Bb perpendicolari sopra la seconda; la parte ab

di questa seconda retta è la *projezione* di AB sopra KK' (t° 2° § 85). Ciò posto, dovremo avere $ab = AB \cos \nu$, indicando ν l'angolo che le due rette LL', KK' fanno fra loro.

In fatti, conducansi per i punti A, B, due piani MN, PQ perpendicolari a KK'; questi piani contengono le due perpendicolari Aa, Bb già abbassate. Dal punto A guidiamo poi AI perpendicolare sopra il piano PQ, ed uniamo il punto B con il punto I ove questa perpendicolare incontra PQ; il triangolo AIB è rettangolo in I, e ci dà (t° 3° § 123)

$$AI = AB \cos BAI.$$

Ma $AI = ab$, come parti delle parallele comprese da piani paralleli; e altronde l'angolo BAI non è che l'angolo delle due rette LL', KK''. Dunque finalmente

$$ab = AB \cos \nu;$$

cioè, *la projezione di una retta sopra un' altra è eguale al prodotto della retta moltiplicata per il coseno dell' angolo che essa forma con la sua projezione.*

Applichiamo questo risultato al proposto quesito.

Siano AX, AI, AZ (fig. 178) tre assi rettangolari; AX', AY', AZ' tre assi obliqui. Da un qualunque punto M della superficie guidiamo le primitive coordinate MP, PQ, AQ, e le nuove MP', P'Q', AQ'; poi dai punti M, P', Q', concepiamo tre piani perpendicolari ad AX. È evidente che il piano guidato dal punto M taglia AX nel punto P, poichè si confonde con il piano MPQ. In quanto agli altri due, siano p', q', i loro punti d'incontro con AX.

Risulta da questa costruzione che la distanza AQ, o x, si compone di tre parti Aq', $p'q'$, $p'Q$, che possono riguardarsi come le projezioni rispettive delle coordinate AQ', P'Q', MP', ossia x', y', z', sopra l'asse delle x. Dunque, indicando con (x',x),

(y', x), (z', x) gli angoli che i nuovi assi formano con il primitivo asse delle x, avremo, atteso il precedente teorema,

$$x = x' \cos(x', x) + y' \cos(y', x) + z' \cos(z', x).$$

Concepiamo adesso che siansi projettate in egual modo le coordinate x', y', z', sopra ciascuno dei due assi delle y e delle z, e, prevalendoci delle indicazioni analoghe alle precedenti, otterremo egualmente

$$y = x' \cos(x', y) + y' \cos(y', y) + z' \cos(z', y),$$
$$z = x' \cos(x', z) + y' \cos(y', z) + z' \cos(z', z).$$

Le nove costanti, che entrano in queste tre formole, sono altronde collegate fra loro (§ 292) dalle relazioni

$$\cos^2(x', x) + \cos^2(x', y) + \cos^2(x', z) = 1,$$
$$\cos^2(y', x) + \cos^2(y', y) + \cos^2(y', z) = 1,$$
$$\cos^2(z', x) + \cos^2(z', y) + \cos^2(z', z) = 1.$$

321. 3.° Caso. *Passare da un sistema rettangolare ad un' altro rettangolare della stessa origine.*

Le formole sono come quelle del caso precedente; ma conviene aggiungere alle relazioni già stabilite fra i coseni, quelle che esprimono (§ § 291 e 293) che i nuovi assi sono perpendicolari due a due; ciò che ci dà, per il numero citato,

$$\cos(x', x)\cos(y', x) + \cos(x', y)\cos(y', y) + \cos(x', z)\cos(y', z) = 0,$$

$$\cos(x', x)\cos(z', x) + \cos(x', y)\cos(z', y) + \cos(x', z)\cos(z', z) = 0,$$

$$\cos(y', x)\cos(z', x) + \cos(y', y)\cos(z', y) + \cos(y', z)\cos(z', z) = 0.$$

Si vede dunque che le costanti, che entrano nel-

le formole relative al caso attuale, sono connesse fra loro da sei differenti relazioni; d'onde siegue che fra questi *nove* coseni, non ve ne siano che tre de' quali possa disporsi ad arbitrio.

Esistono, in fatti, altre formole atte a far passare da un sistema rettangolare ad un altro della stessa specie, e nelle quali non si fanno entrare in considerazione che *tre costanti*, cioè:

1.° L' angolo che la *traccia* del piano x', y', sopra il piano delle xy forma con il primitivo asse delle x;

2.° L' angolo che fanno fra loro il piano delle $x'y'$ e quello delle xy;

3.° Finalmente l' angolo che fa l' asse delle x' con la traccia di cui parliamo.

Si scorge facilmente che bastano questi dati per fissare la posizione dei tre nuovi assi, rapporto ai primitivi; ma queste formole essendo assai complicate e poco simetriche, noi rimettiamo la loro determinazione al tom. II. num.° 1.° della *Corrispondenza delle scuole Politechniche*, opera in cui abbiamo egualmente desunto il metodo adottato negli ultimi due casi della trasformazione delle coordinate.

Casi particolari del precedente.

322. Potremo, conservando uno dei primitivi assi; per es. quello delle z, variare la direzione degli altri due nel piano delle xy.

In questo caso, avremo evidentemente (fig. 179)

$\cos(y', x) = \cos[100° + (x', x)] = -\text{sen}(x', x)$,
$\cos(z', x) = o$,

$\cos(x', y) = \text{sen}(x', x)$, $\cos(y', y) = \cos(x', x)$,
$\cos(z', y) = o$,

$\cos(x', z) = o$, $\cos(y', z) = o$, $\cos(z', z) = 1$;

ciò che ci dà per le formole corrispondenti,

$$x = x'\cos(x', x) - y'\mathrm{sen}(y', x),$$
$$y = x'\mathrm{sen}(x', x) + y'\cos(y', x),$$
$$z = z'.$$

Le due prime sono indentiche con quella del n: 92, poichè in realtà tutto si riduce qui ad una remplice trasformazione di coordinate a due dimensioni.

323. Vedremo in seguito che, per discutere una superficie curva di posizione determinata, per mezzo di un'equazione $F(x, y, z)=o$ fra coordinate rettangolari, convien determinare le intersecazioni di questa superficie con dei piani condotti sotto differenti inclinazioni. Ora, combinando l'equazione $F(x, y, z)=o$ con quella di un piano,

$$Ax + By + Cz + D = o,$$

eliminando una delle variabili, per esempio z, otterremo un'equazione $F'(x, y)=o$, che rappresenta (§ 308) la projezione della curva d'intersecazione sopra il piano delle xy, ma che, in generale, nulla ci dice della stessa curva, Per conoscerne la natura, converrebbe procurarsene l'equazione nel piano dato, ciò che facilmente si ottiene con la seguente trasformazione.

Prendiamo per *piano delle* $x'y'$ il piano di cui ri richiede l'intersecazione con la superficie; per *asse delle* x' la traccia AC (fig. 180) di questo piano sopra quello delle xy; l'asse delle y' è allora una perpendicolare AD condotta a questa traccia nel piano secante, e l'asse delle z' una perpendicolare a questo piano. Chiamiamo poi φ l'angolo CAX, θ l'angolo che forma il piano secante, o il piano del'e $x'y'$ con quello delle xy.

Questi due angoli, la di cui cognizione basta per

fissare la posizione dei tre nuovi assi, possono esser dati *a priori*, ovvero possono facilmente ottenersi dall' equazione

$$Ax+By+Cz+D=o.$$

Avremo primieramente (§ 311) per l' angolo θ,

$$\cos\theta=\frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

In quanto all' angolo φ, siccome l' equazione della traccia del piano sopra quello delle xy è

$$Ax+By+D=o,$$

ne siegue che $-\frac{A}{B}$ esprime il valore di tang φ.

Ciò posto, per riferire la superficie curva al nuovo sistema di assi, avendosi le formole già fissate n. 321, basterebbe sostituirle nella equazione $F(x, y, z)=o$. Ma siccome il nostro scopo è di trovare l' intersecazione della superficie con il piano delle $x'y'$, converrebbe far poi $z'=o$ nell' equazione trasformata; ciò che riducesi, come è chiaro, a stabilir subito $z'=o$ nelle formole del n. 321, le quali con ciò si riducono a

$$x=x'\cos(x', x)+y'\cos(y', x),$$
$$y=x'\cos(x', y)+y'\cos(y', y),$$
$$z=x'\cos(x', z)+y'\cos(y', z);$$

ed a portare questi valori nella equazione

$$F(x, y, z)=o.$$

Ma ci rimane ancora di esprimere le costanti, che entrano in queste formole, in funzione dei soli dati necessarii φ e θ.

A tale oggetto, riguardiamo l' origine A come il centro di una sfera le di cui intersecazioni con i

qual volta vorremo determinare la natura della intersecazione di una superficie curva con un piano qualunque. Esse non sono che un caso particolare delle formole delle quali abbiamo parlato (§ 321).

324. *Osservazione*. Nelle precedenti trasformazioni abbiamo supposto che l'origine fosse la stessa. Che se fosse altrimenti, converrebbe (§ 319) introdurre nei secondi membri di tutte le formole le quantità a, b, c, che esprimono le coordinate della nuova origine riferita agli assi primitivi.

325. Daremo fine a questo paragrafo colla trasformazione delle coordinate ortogonali in coordinate polari (Ved. § 215).

Sia O (fig. 181) un punto chiamato *polo* di posizione data nello spazio per mezzo delle sue coordinate a, b, c, ovvero AC, CB, OB, riferite ai tre assi rettangolari AX, AY, AZ, $OM=r$, un *raggio vettore*, cioè una linea condotta da questo punto fisso ad un qualunque punto di una superficie curva, $F(x, y, z)=o$, rappresentando x, y, z, le coordinate AQ, PQ, MP di quest' ultimo punto riferito alli stessi assi.

Indichiamo poi con (r, x), (r, y), (r, z), gli angoli che forma il raggio vettore OM con ciascuno dei tre assi.

Avremo evidentemente dalla figura

AQ o $x=AC+CQ=a+CQ$; ma (t.° 3.° 126)

$CQ=OM.\cos(r, x)=r\cos(r, x)$; dunque

$$x=a+r\cos(r, x) \;.\;.\; (1).$$

Così, per le altre coordinate, si otterrebbe

$$y=b+r\cos(r, y) \;.\;.\;.\; (2),$$

$$z=c+r\cos(r, z) \;.\;.\;.\; (3).$$

I valori di x, y, z, sostituiti nell'equazione della superficie, ci daranno una relazione fra il

raggio vettore r e gli angoli che questo raggio vettore forma con i tre assi; questa equazione è quella che si chiama *equazione polare* della superficie.

N. B. Gli angoli (r, x), (r, y), (r, z) sono, come si è veduto (§ 292) legati fra loro dalla relazione

$$\cos^2(r, x)+\cos^2(r, y)+\cos^2(r, z)=1.$$

326. Alle formole (1), (2), (3) possono sostituirsene delle altre che non contenghino che due angoli indipendenti l' uno dall' altro cioè, l' angolo θ che forma il raggio OM con la projezione BP sopra il piano delle xy, e l' ang. φ formato da questa projezione con l' asse delle x.

In fatti, guidiamo OH parallela a BP, e BR parallela ad AX; ed avremo ad evidenza

$$AQ=a+BR,\ QP=b+RP,\ MP=c+MH;\quad \text{ma}$$

$$BR=BP\cos\varphi=OH\cos\varphi=r\cos\theta\cos\varphi,$$

$$RP=BP\,\text{sen}\,\varphi=OH\,\text{sen}\,\varphi=r\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi$$

$$MH=OM\,\text{sen}\,MOH=r\,\text{sen}\,\theta;\quad \text{dunque}$$

$$AQ,\ \text{o}\ x=a+r\cos\theta\cos\varphi,$$

$$QP,\ \text{o}\ y=b+r\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi$$

$$MP,\ \text{o}\ z=c+r\,\text{sen}\,\theta.$$

§. II. *Diversi generi di Superfici.*

Benchè questo nostro capitolo abbia per principale scopo l' esposizione della teoria delle superfici di secondo grado, cioè di quelle espresse dalle equazioni di secondo grado, a tre veriabili; pure crediamo di dover discendere in alcuni dettagli sopra certe superfici alle quali siamo bene spesso condotti dalla risoluzione dei problemi indeterminati a

tre dimensioni, giacchè, nel discutere l'equazione generale di secondo grado, avremo occasione, d'incontrarci con i caratteri che convengono a queste sorti di superfici.

Della superficie sferica, e del piano tangente a questa superficie.

327. In Geometria si chiama Superficie sferica *quella i di cui punti sono tutti ad egual distanza da uno stesso punto*, chiamato centro della superficie (t.° 2.° § 97).

Questa proprietà caratteristica può essere facilmente espressa dall' analisi. In fatti, siano, x, y, z, le coordinate di un qualunque punto della superficie, α; β, γ, quelle del centro; ed r la distanza costante, ossia il raggio della sfera.

Avremo (§ 281), per l' equazione della superficie,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

per gli assi rettangolari; e per gli assi obliqui (§ 282)

$$\left.\begin{array}{l}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\\ +2(x-\alpha)(y-\beta).\cos(x\,,\,y)\\ +2(x-\alpha)(y-\gamma).\cos(x\,,\,z)\\ +2(y-\beta)(z-\gamma).\cos(y\,,\,z)\end{array}\right\}=0 \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

ma per questa forma complicata è la (2) di poco uso.

Casi particolari. Quando sia nel centro l' origine, le coordinate α, β, γ, sono *nulle*, e riducesi l' equazione alla

$$x^2+y^2+z^2=r^2. \quad . \quad . \quad (3),$$

che è più frequentemente impiegata.

Il centro può essere situato, o sopra uno dei piani coordinati, o sopra uno degli assi.

Supponiamolo, per esempio, sopra il piano delle xy, nel qual caso avremo $y=o$, e l'equazione diverrà

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2 \ldots (4).$$

Ammettiamo ancora che il centro, si trovi sopra l'asse delle x, ed avendosi da ciò $\beta=o$, $\gamma=o$, ne risulterà

$$(x-\alpha)^2+y^2+z^2=r^2 \ldots (5).$$

328. Lo sviluppo della (1) ci dà un risultato della forma

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=o \ldots (6).$$

Reciprocamente, qualunque equazione con questa forma, essendo rettangolari gli assi, rappresenta la superficie di una sfera, le di cui coordinate del centro sono

$$\alpha=-\frac{A}{2},\ \beta=-\frac{B}{2},\ \gamma=-\frac{C}{2},$$

ed ha per raggio

$$r=\sqrt{\left(\frac{A^2+B^2+C^2-D}{4}\right)}$$

La dimostrazione di questa reciproca si rende inutile essendo del tutto uniforme a quella del § 47.

329. Per determinare la natura della intersecazione di una sfera con un piano, basta (§ 323) combinare l'equazione $x^2+y^2+z^2=r^2$ con le formole

$$x=x'\cos\varphi+y'\operatorname{sen}\varphi\cos\theta+a,$$

$$y=x'\operatorname{sen}\varphi-y'\cos\varphi\cos\theta+b,$$

$$z=y'\operatorname{sen}\theta+c;$$

e la risultante in x', y' apparterrà alla curva d'intersecazione.

Ora, sostituendo nella 1.ª ad x, y, z, i loro valori, si scorge: 1.° che il coefficiente di $x'\, y'$ è eguale a o: 2.° che i coefficienti di x'^2, y'^2 sono eguali all' unità; cosichè (§ 47) questa equazione è quella di una circonferenza del cerchio.

330. Facciamoci ora a rintracciare l' equazione *del piano tangente* alla sfera, in un punto (x',y',z') di questa superficie riferita ad assi rettangolari.

Supponiamo che l' equazione della sfera sia

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2 \ldots (1),$$

e che quella del piano sottoposto a passare per il punto x', y', z'; e sia (§ 300)

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=o \ldots (2).$$

Sappiamo già (t.° 2.° § 97) che il piano tangente alla sfera è perpendicolare al raggio che passa per il punto di contatto. Dopo ciò, essendo l'equazione del raggio (§ 287)

$$x-x'=\frac{x'-\alpha}{z'-\gamma}\,(z-z'),\quad y-y'=\frac{y'-\beta}{z'-\gamma}\,(z-z'),$$

le relazioni $A=aC$, $B=bc$ (§ 303) ci daranno

$$A=\frac{x'-\alpha}{z'-\gamma}.\ C,\quad B=\frac{y'-\beta}{z'-\gamma}.\ C;$$

onde, sostituendo nella (2) e dividendo per C,

$$(x'-\alpha)(x-x')+(y'-\beta)(y-y')+(z'-\gamma)(z-\gamma)=o..(3).$$

E sotto questa prima forma può rappresentarsi l' equazione del piano tangente.

Ma può riceverne un' altra dipendente dalla re- lazione

$$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2=r^2,$$

che esprime trovarsi sopra la sfera il punto(x',y',z').

In fatti, questa relazione si riduce alla

$$(x'-\alpha)(x'-\alpha)+(y'-\beta)(y'-\beta)\mp(z'-\gamma)(z'-\gamma)=r^2;$$

che, addizionata coll' equazione (3), ci dà

$(x'-\alpha)(x-\alpha)+(y'-\beta)(y-\beta)+(z'-\gamma)(z-\gamma)=r^2$. (4),

risultato che non diversifica dall' equazione della sfera se non per i quadrati $(x-\alpha)^2$, $(y-\beta)^2$, $(z-\gamma)^2$, ossia $(x-\alpha)(x-\alpha)$, $(y-\beta)(y-\beta)$, $(z-\gamma)(z-\gamma)$, che vengono rimpiazzati dai rettangoli $(x'-\alpha)(x-\alpha)$, $(y'-\beta)(y-\beta)$, ...

Se l'origine sarà nel centro stesso della sfera, avremo

$\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, e la (4) si ridurrà alla

$$x'x+y'y+z'z=r^2$$

equazione la più addottata nelle applicazioni.

Delle Superfici cilindriche.

331. Con tal denominazione abbiamo intesa, (t.° 2.° § 98) *qualunque superficie generata da una retta, che si muove parallelamente alla posizione di un' altra retta data attorno ad una certa curva* chiamata la *direttrice* della superficie; e la retta mobile vien detta *generatrice*.

Per esprimere questo carattere generale coll' analisi; siano le equazioni della generatrice riguardata in qualunque posizione

$$x=az+\alpha, \quad y=bz+\beta;$$

e le equazioni della curva che serve di direttrice

$$F(x, y, z)=0, \quad F'(x, y, z)=0.$$

Poichè la generatrice, movendosi, si conserva parallela a se stessa, ne siegue (§ 288) che le quantità a, b, restino le stesse per tutte le posizioni della generatrice; ma le quantità α, β, che (§ 302) esprimono le x ed y del punto ove la generatrice incontra il piano delle xy, sono costanti per tutti i punti di una stessa posizione della generatrice, e

variano quando la generatrice passa da una ad un' altra posizione. Deve dunque necessariamente esistere una certa relazione fra queste quantità α, β, o fra le loro corrispondenti $x-az$, $y-bz$, poichè sono esse *costanti insieme*, e *variabili insieme*.

Per giungere a questa relazione, osserviamo che, dovendo la generatrice in tutte le sue posizioni incontrare la curva che serve per direttrice, le equazioni di questa curva e quelle della generatrice devono esistere simultaneamente per i punti d' intersecazione; e siccome sono esse *quattro* in numero, dall' eliminare le coordinate x, y, z, perverremo ad un' equazione fra α, β, e le quantità cognite, e questa sarà appunto la relazione cercata.

Questa relazione, che potremo rappresentare in generale con $f(\alpha, \beta)$, ovvero $\beta = f(\alpha)$, diverrà, sostituendo ad α e β i loro valori $x-az$, $y-bz$,

$$f(x-az, y-bz) = o, \text{ o } y-bz = f(x-az).$$

Per fissare le idee, proponiamoci di trovare l' equazione del *cilindro* obliquo *a base circolare*.

Siano $x^2 + y^2 = r^2$ e $z = o$. . . (1)

le equazioni del cerchio che deve servire di direttrice, e che supponiamo, per maggior semplicità, situato nel piano delle xy, trovandosi altronde il centro nell' origine.

Le equazioni generali della generatrice sono sempre

$$x-az = \alpha, \quad y-bz = \beta. \ . \ . \ (2).$$

Ora, per esprimere che la generatrice in tutte le sue posizioni incontra il cerchio, convien combinare fra loro le *quattro* equazioni (1) e (2).

La prima, dall' ipotesi $z = o$, introdotta nelle (1), abbiamo $x = \alpha$, $y = \beta$;

e, sostituendo questi valori nella prima delle (1),

$$\alpha^2+\beta^2=r^2 . \quad . \quad . \quad . \quad (3);$$

e questa è la relazione che lega fra loro le quantità α, β, che abbiamo riconosciuto che devono essere *costanti insieme*, e *variabili insieme*.

Se adesso sostituiremo ad α, β, i loro valori $x-az$, $y-bz$ nella (3), otterremo

$$(x-az)^2+(y-bz)^2=r^2,$$

per l'equazione del cilindro obliquo a base circolare.

332. Potremo conoscere, *a posteriori*, che qualunque equazione della forma

$$y-bz=f(x-az). \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

appartiene ad una superficie composta di un' infinità di *linee rette parallele fra loro*, ciò che caratterizza la superficie cilindrica.

In fatti, venga segata questa superficie da un piano che abbia per equazione $x-az=k$; ne risulta necessariamente

$$y-bz=f(k)=\text{const.}=l.$$

È di quì che la linea d' intersecazione della superficie con il piano $x-az=k$ si trova sopra un' altro piano $y-bz=l$; dunque questa intersecazione è una linea retta.

Consideriamo adesso una serie di altri piani.

$$x-az=k', \quad x-az=k'', \quad x-az=k''', \ldots$$

paralleli ai primi, e che taglino la superficie.

L' equazione diviene successivamente

$$y-bz=l', \quad y-bz=l'', \quad y-bz=l''', \ldots;$$

cioè le intersecazioni della superficie con i piani paralleli al piano $x-az=k$, si trovano situate nei piani paralleli al piano $y-bz=l$.

E perciò, tutte queste intersecazioni sono linee rette parallele a quella che ha per equazioni

$$x-az=k \text{ e } y-bz=l.$$

Diremo, *con più generalità* che ogni equazione della forma

$$Mx+Ny+Pz=F\ (Ax+By+Cz)\ldots\ (1),$$

riguardo alla quale la $y-bz=f\ (x-az)$ non è che un caso particolare, appartiene ad una superficie cilindrica.

In fatti, tagliando la superficie con una serie di piani paralleli fra loro, e che abbiano per equazioni

$$Ax+By+Cz=D,\ D',\ D'',\ D''',\ \ldots,$$

la (1) diviene, per ogni valore di D, D', D'',...

$$Mx+Ny+Pz=Q,\ Q',\ Q'',\ Q''',\ \ldots,$$

Onde le linee d'intersecazione si trovano sopra un'altra serie di piani paralleli fra loro, e sono, per ciò, rette parallele fra loro.

Ci occorrerà in seguito di riprendere questo carattere generale delle superfici cilindriche.

Superfici coniche.

333. *Trovare l'equazione generale delle* Superfici Coniche, cioè, esprimere coll'analisi che *una superficie è generata dal moto di una retta che passa costantemente per un punto dato*, chiamato Centro della superficie, e che è *costretta a muoversi attorno di una curva* che ha una posizione data nello spazio; questa curva si chiama *direttrice*, e la retta mobile dicesi *generatrice*.

Siano x', y', z' le coordinate del centro della superficie, e

$$F(x, y, z)=0, \quad F'(x, y, z)=0\ldots\ (1)$$

le equazioni della direttrice.

Quelle della generatrice avranno la forma (§ 287)

$$x-x'=a(z-z'),\ y-y'=b(z-z')\ldots(2)$$

Osserviamo adesso che, per qualunque superficie cognita, quando il punto x, y, z, cangia posizione, senza che venga a cambiare la posizione stessa della generatrice, le quantità

a e b, o le loro eguali $\frac{x-x'}{z-z'}$, $\frac{y-y'}{z-z'}$, sono costanti, ma variano ambedue se il punto passa da una ad un' altra generatrice. Dunque queste quantità, che sono *insieme* e *costanti* e *variabili*, dipendono, in un certo modo, l' una dall' altra.

Per ottenere questa relazione, basta (§ 331) combinare fra loro le (1) e (2), le quali, essendo *quattro* in numero, ci conducono, mediante l' eliminazione di x, y, z, ad un' equazione di condizione fra a e b.

Dal sostituire in questa equazione, in luogo di queste ultime quantità, i loro valori $\frac{x-x'}{z-z'}$, $\frac{y-y'}{z-z'}$,

otterremo in fine, per l' equazione della superficie conica,

$$f\left(\frac{x-x'}{z-z'},\ \frac{y-y'}{z-z'}\right)=0,\ \text{o}\ \frac{y-y'}{z-z'}=f\left(\frac{x-x'}{z-z'}\right).$$

334. Prendiamo, per esempio, *il cono obliquo a base circolare*, e supponiamo che, essendo situata la base nel piano delle xy, il centro di questa base sia nella origine, nel qual caso avremo, per le equazioni della direttrice,

$$x^2+y^2=r^2,\ z=0.\ \ldots\ (1).$$

Combiniamole con quelle della generatrice, cioè:

$$x-x'=a(z-z'),\ y-y'=b(z-z').\ \ldots\ (2).$$

Ora, l' ipotesi $z=0$, introdotta nelle (2), ci dà

$$x=x'-az', \quad y=y'-bz';$$

onde, sostituendo nella prima delle equazioni (1),

$$(x'-az')^2+(y'-bz')^2=r^2;$$

e questa è l'equazione di condizione che deve esistere fra le quantità a, b, nel tempo stesso che le equazioni (2) della generatrice.

Sostituendo ad a, b i loro valori $\frac{x-x'}{z-z'}$, $\frac{y-y'}{z-z'}$ otterremo per l'equazione richiesta

$$[x'(z-z')-z'(x-x')]^2+[y'(z-z')-z'(y-y')]^2=r^2(z-z')^2.$$

Nel caso del *cono retto*, cioè, quando il centro del cono si trova sull'asse delle z, avremo nel tempo stesso $x'=0$, $y'=0$, e la precedente equazione si ridurrà a

$$z'^2x^2+z'^2y^2=r^2(z-z')^2.$$

Potremmo ora, combinando questa equazione colle formole del n.° 323, ottenere i varj generi d'intersecazione della superficie conica con un piano; ma non ci arresteremo sopra una discussione già esposta con altro metodo.

335. *Reciprocamente*, ogni equazione a tre variabili ha la forma

$$F\left(\frac{x-x'}{z-z'}, \frac{y-y'}{z-z'}\right)=0, \text{ o } \frac{y-y'}{z-z'}=F\left(\frac{x-x'}{z-z'}\right) \ldots (1)$$

(rappresentando x', y', z' le coordinate di un punto fisso nello spazio), *caratterizza una superficie conica.*

Infatti, tagliamo la superficie con una serie di piani che abbiano per equazioni

$$\frac{x-x'}{z-z'} = k, \quad \frac{x-x'}{z-z'} = k', \quad \frac{x-x'}{z-z'} = k'', \ldots$$

Siccome l' equazione (1) diviene allora

$$\frac{y-y'}{z-z'} = l, \quad \frac{y-y'}{z-z'} = l', \quad \frac{y-y'}{z-z'} = l'', \ldots$$

ne siegue che le rette d'intersecazione della superficie con i piani corrispondenti alla prima serie di equazioni, si trovino egualmente situati nei piani espressi dalla seconda serie. Dunque tutte queste intersecazioni sono linee rette. Altronde poi, un qualunque sistema di due equazioni della prima e della seconda serie, per esempio, $\frac{x-x'}{z-z'} = k$, $\frac{y-y'}{z-z'} = l$, rappresenta una retta che passa per il punto (x', y', z').

Dunque finalmente, potremo riguardare la superficie come composta di una infinità di linee rette, che passano tutte per questo stesso punto.

Superfici conoidi.

336. Con tal denominazione vuolsi intendere *ogni superficie generata da una retta mobile, soggetta ad essere costantemente parallela ad un piano, ed a scorrere lungo una retta fissa di posizione nello spazio, ed una curva data egualmente.*

Per idearsi una tal generazione, supponiamo condotti nello spazio un' infinità di piani paralleli al piano dato; ciascuno di essi taglia la retta fissa in un punto, e la curva in uno o più punti. Unendo questi ultimi punti con quello della retta fissa, e ripetendo questa stessa operazione riguardo a tutti i piani paralleli, otterremo un' infinità di

rette, dalla di cui unione verrà costituita la superficie conoide. La denominazione di questa sorte di superfici deriva dall'analogia che esse hanno con le superfici coniche. Il centro, o il vertice del cono, si trova qui rimpiazzato da una linea retta che serve, in certo modo, per *prima direttrice*.

Passiamo a rintracciare la loro equazione.

Per maggior semplicità, prenderemo per asse delle z la retta che deve servire per prima direttrice, per il piano delle xy, quello al quale la generatrice ossia retta mobile dev'essere costantemente parallela. Gli assi delle x e delle y saranno poi due rette condotte ad arbitrio nel piano ora indicato, e per il punto d'incontro di questo piano con la retta presa per asse delle z. Si vede, da tal costruzione, che la superficie si trova, in generale, riferita ad assi obliqui.

Ciò posto, le equazioni della curva presa per *seconda direttrice*, siano

$$F(x, y, z) = o, \quad F'(x, y, z) = o \ldots (1).$$

Quelle della retta mobile, considerata in qualunque posizione, avranno la forma

$$y = mx, \quad z = n. \; . \; . \; (2)$$

poichè la sua distanza dal piano delle xy, valutata secondo l'asse delle z, dev'esser costante, e la sua projezione sopra il piano delle xy passa necessariamente per l'origine.

Ora è evidente che, per tutti i punti di una certa posizione della generatrice, le quantità m ed n, o le loro eguali $\frac{y}{x}$ e z, restano le stesse; ma variano da una ad un'altra posizione. Queste quantità essendo *costanti insieme*, e *variabili insieme*, sono l'una funzione dell'altra. Perciò

$$F\left(\frac{y}{x},\ z\right)=o;\ \text{o}\ z=F\left(\frac{y}{x}\right)$$

è la forma generale delle equazioni delle superfici conoidi.

Per determinare la natura di questa funzione in ciascun caso particolare, osserviamo che le (1) e (2) devono esistere nel tempo stesso per i punti comuni alla generatrice ed alla prima direttrice. Dunque, eliminando x, y, z, fra queste equazioni, otterremo fra m ed n una relazione tale che, sostituendo a queste quantità i loro valori $\frac{y}{x}$, z, otterremo la richiesta equazione.

337. Supponiamo, *per prima applicazione*, che, una delle direttrici essendo sempre l'asse delle z, si abbia per seconda direttrice una retta, le di cui equazioni siano

$$x=az+\alpha,\qquad y=bz+\beta\ \ldots\ (1).$$

Queste combiniamole con quelle delle generatrice, cioè: $y=mx,\quad z=n\ \ldots\ (2)$.

Primieramente, il valore $z=n$, portato nelle (1), ci dà $x=an+\alpha$, $y=bn+\beta$, onde, sostituendo nella prima delle (2),

$$bn+\beta=amn+\alpha m.$$

Tale è la relazione che lega fra loro le quantità m, n, e che dev' esistere per tutte le posizioni della generatrice nel tempo stesso delle equazioni di questa retta.

Sostituendo in fine ad m ed n i loro valori, si trova $bz+\beta=az.\frac{y}{x}+\alpha.\frac{y}{x}$, [e, trasportando,

$$bxz-ayz+\beta x-\alpha y=o \ . \ . \ . \ (3)$$

per l'equazione della *superficie generata da una retta che si muove parallelamente ad un piano appoggiandosi sempre sopra due altre rette.*

338. Può ottenersi una molto più semplice equazione di questa superficie, scegliendo gli assi convenevolmente.

Siano CC', DD' (fig. 182) le due direttrici. Imaginiamo, per la prima, un piano parallelo alla seconda, e prendiamo questo piano per quello delle yz. Uno dei piani, ai quali la generatrice deve essere parallela, incontrando le direttrici in A e B, per esempio, niente c'impedirà di prendere per asse delle x la retta AB che rappresenta una delle posizioni della generatrice. Questo stesso piano taglia il piano di cui abbiamo prima parlato, secondo una certa retta che può prendersi per asse delle y; quello delle z sarà altronde la prima direttrice, come precedentemente.

Ciò posto, risulta dalla posizione delle due direttrici rapporto ai piani coordinati, che le equazioni della retta DD' siano

$$x=a, \qquad y=bz \ . \ . \ . \ (1),$$

poichè la sua projezione sopra il piano xy dev'essere parallela all'asse delle y, e la sua projezione sopra il piano delle yz passa necessariamente per l'origine.

Abbiamo inoltre, per le equazioni della generatrice $\quad y=mx, \qquad z=n \ . \ . \ . \ (2),$

e d'altro non si tratta che di combinare le (1) e (2) per dedurne la relazione che deve esistere fra le quantità m, n.

La $y=mx$, attesochè $x=a$ ci dà $y=ma$, valore che, sostituito con $z=n$ nella $y=bz$, ci fa ottenere $\qquad ma=bn.$

Sostituendo poi ad m ed n i loro valori

$m=\frac{y}{x}$, $n=z$, dedottti dalle (2), otterremo alla fine per l' equazione della superficie

$$a.\frac{y}{x}=bz\,, \qquad \text{o} \qquad bxz-ay=o.$$

Se in questa faremo $y=o$, ne risulterà

$$bxz=o\,, \quad \text{cioè} \quad x=o\,, \quad \text{o} \quad z=o.$$

Il primo sistema $y=o$, $x=o$, rappresenta l' asse delle z; ed il secondo, $y=o$, $z=o$, l'asse delle x, ciò che prova che ciascuno di questi assi appartiene alla superficie, come si è già avvertito.

Avremo in breve occasione di riprendere questa specie di superficie conoide.

Superfici di rivoluzione.

339. Si dà un tal nome a *qualunque superficie generata dalla rivoluzione di una curva*, chiamata GENERATRICE, *attorno di una retta denominata* ASSE, *in guisa che ciascun punto di questa curva descriva una circonferenza di cerchio il di cui piano è perpendicolare all' asse di rivoluzione e che ha il suo centro sopra quest' asse* (V. 1.° 2.° § 97).

Da tal definizione risulta ad evidenza che, tagliando la superficie con un qualunque piano perpendicolare all' asse, *si ottiene per sezione una circonferenza di cerchio che ha il centro nell' asse*. Questo carattere ci guiderà all' equazione generale delle superfici di rivoluzione.

Per giungervi, osserviamo prima che, qualunque siasi la posizione di una delle circonferenze che compongono la superficie, si può sempre (§

329) riguardare questa circonferenza come risultante dalla intersecazione di una sfera che ha il suo centro nell'asse mediante un piano perpendicolare a quest' asse.

Ciò posto, siano

$$x-\alpha=a(z-\gamma),\quad y-\beta=b(z-\gamma),$$

le equazioni dell' asse di rivoluzione; rappresentando α, β, γ le coordinate di un punto preso ad arbitrio sopra questa retta.

Avremo, (§ 305) per l' equazione di un piano che gli è perpendicolare,

$$ax+by+z=k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1);$$

e per l' equazione di una sfera che ha il suo centro nel punto (α, β, γ),

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Il sistema di queste due equazioni rappresentando una qualunque delle circonferenze del cerchio situate sopra la superficie, dovremo riguardare k ed r^2 come quantità *costanti insieme* per tutti i punti di una stessa circonferenza, e come *variabili insieme* quando il punto della superficie di rivoluzione passa da una circonferenza ad un'altra. Perciò queste due quantità, o le loro eguali

$$ax+by+z,\quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2,$$

sono necessariamente l' una *funzione* dell' altra.

Dunque l' equazione generale delle superfici di rivoluzione sarà

$$ax+by+z=F[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2],\ \text{o}$$
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=F(ax+by+z).$$

La natura della funzione F, cioè la maniera con cui le quantità $ax+by+z$, $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$, devono essere legate

fra loro, si determinerà facilmente, allorchè si conoscerà la natura della generatrice.

In fatti, siano le equazioni della generatrice

$$f(x, y, z)=o, \quad f'(x, y, z)=o \ldots(3).$$

Siccome la ci corferenza, rappresentata dalle equazioni (1) e (2), è generata da uno dei punti della generatrice (3), conviene esprimere che la generatrice considerata nella sua prima posizione, e la circonferenza, hanno un punto comune, e, perciò, che le (1), (2), (3) hanno luogo nel tempo stesso.

Avremo dunque così *quattro* equazioni fra le quali può eliminarsi x, y, z; ciò che ci darà *un' equazione di condizione* fra k ed r^2, nella quale di altro non si tratterà più che di sostituire in luogo di queste due quantità i loro valori, per avere l'equazione della superficie di rivoluzione individuale che si considera.

340. Può supporsi, per maggior semplicità, che l'asse di rivoluzione si confonda con uno degli assi coordinati, per esempio, con quello delle z.

In questo caso, una qualunque delle circonferenze, situate sopra la superficie, trovandosi in un piano parallelo al piano delle xy, ed avendo il suo centro sopra l'asse delle z, può essere rappresentata dal sistema di due equazioni

$$z=k, \quad x^2+y^2=r^2,$$

la prima delle quali esprime un piano orizzontale, e la seconda la superficie di un cilindro retto il di cui asse si confonde con l'asse delle z.

Perciò, qualunque siasi la generatrice della superficie, avremo per equazione di questa superficie.

$$z=F(x^2+y^2), \quad o \quad x^2+y^2=F(z);$$

così si troverebbe

$$x = F(y^2+z^2), \quad o \quad y = F(x^2+z^2)$$

per le equazioni delle superficì di rivoluzione che avrebbero per asse quello delle x, o quello delle y.

341. Proponiamoci, per primo esempio, di trovare la superficie di rivoluzione generata dal moto di una retta qualunque attorno l'asse delle z.

Siano le equazioni di questa retta

$$x = Mz+N, \quad y = M'z+N';$$

le equazioni della circonferenza, descritta da ciascuno dei punti della retta, avranno la forma

$$x = k, \quad x^2+y = r^2.$$

Le due prime, combinate con la terza, ci danno

$$x = Mk+N, \quad y = M'k+N';$$

onde, sostituendo nella quarta,

$$(Mk+N)^2+(M'k+N')^2 = r^2,$$

o, ponendo in luogo di k e di r^2 i loro valori generali z ed x^2+y^2,

$$(Mz+N)^2+(M'z+N')^2 = x^2+y^2.$$

In quest' esempio, niente ci impedisce di prendere, per asse delle x. la *più curta distanza* fra la retta data e l' asse di rivoluzione; nel qual caso la retta è parallela al piano delle yz; ed abbiamo per le equazioni della generatrice

$$x = N, \quad y = M'z;$$

cioè, basta supporre $M = o$, $N' = o$ nell' equazione precedente, e si troverà

$$M'^2z^2+N^2 = x^2+y^2$$

per l' equazione della superficie.

Serva di secondo esempio, un' iperbole situata

nel piano delle xz, e riferita al suo *asse trasverso* come asse delle x, ed al suo asse *non trasverso* come asse delle z.

Le equazioni di quest' iperbole sono (§ 110)

$$y = o, \quad B^2x^2 - A^2z^2 = A^2B^2;$$

essendo altronde quelle della generatrice

$$x = k, \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

ed ottiensi, dall'eliminaziono di x, y, z fra queste quattro equazioni,

$$B^2r^2 - A^2k^2 = A^2B^2,$$

o, ponendo per k ed r^2 i loro valori,

$$B^2(x^2+y^2) - A^2z^2 = A^2B^2,$$

equazione identica, riguardo alla forma, con l'altra

$$M^2z^2 + N^2 = x^2 + y^2, \quad \text{o}$$

$$x^2 + y^2 - M'^2z^2 = N^2.$$

Dunque la superficie di rivoluzione generata dal moto di una retta attorno di un' altra, altro non è che la superficie generata dal moto di una iperbole che gira attorno del suo asse non trasverso; quest' ultima superficie è ciò che si chiama *iperbolide di rivoluzione ad una sola nappa*. Riprenderemo in seguito questa specie di superfici.

Facendo girare attorno del primo asse principale, sia o un' ellisso, o un' iperbole, o una parabola, situata prima nel piano xz, si giungerebbe con egual facilità alle equazioni di superfici di rivoluzioni corrispondenti.

342. La superficie generata da un' iperbole, o il *paraboloide di rivoluzione*, merita una particolare attenzione.

Siano $\quad y = o, \quad x^2 = 2pz;$

le equazioni di una parabola situata nel piano del-

le x, che ha per asse principale l' asse delle z, per vertice la stessa origine delle coordinate.

Combionando quelle equazioni con queste altre

$$z = k\,, \qquad x^2 + y^2 = r^2\,,$$

si trova l'equazione di condizione

$$r^2 = 2pk\,;$$

e perciò per equazione della superficie

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

Questa equazione combinata con quella del piano, che ha generalmente la forma

$$z = Ax + By + C\,, \qquad \text{ci darà}$$

$$x^2 + y^2 = 2p(Ax + By + C)\,;$$

equazione che rappresenta la projezione sul piano delle xy, della intersecazione del paraboloide con un qualunque piano di direzione nello spazio. Ora questa equazione è ad evidenza quella di un cerchio; dunque, *tagliando un paraboloide di rivoluzione attorno dell' asse delle z, con un piano qualunque, la curva d' intersecazione si projetta costantemente secondo un cerchio sul piano delle xy.*

§ III. *Discussione delle superfici di secondo grado.*

843. I limiti che dobbiam porre a quest' opera non permettendoci di dar qui una teoria completa delle superfici di secondo grado, ci limiteremo sopra tutto a dar risalto alle circostanze relative alla loro classificazione, come anche alle proprietà che risultano immediatamente dalle equazioni le più semplici alle quali è sempre possibile di ricondurre una qualunque equazione di secondo gra-

do a tre variabili. Seguiremo poi, per la discussione di questa equazione, un camino analogo a quello tenuto nel secondo capitolo, per le equazioni a due variabili.

L' equazione più generale delle superfici di secondo grado essendo

$$\left.\begin{array}{l} Az^2+A'y^2+A''x^2+Byz+B'xz+B''xy \\ \quad +Cz+C'y+C''x+D \end{array}\right\}=o \ldots (1)$$

potremo subito (§ 130), con una prima trasformazione di coordinate, fare svanire li tre rettangoli yz, xz, xy, cioè potremo ridurre l' equazione alla forma

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+Nz+N'y+N''x+D=o \ldots (2).$$

(Si veda su di ciò il 2.° Volume della *corrispondenza della Scuola Politecnica* 3.° num.°, ove addussi la dimostrazione completa di tal proposizione con una nota estesa sulle superfici di rivoluzione di secondo grado).

Risulta da tal proposizione, che le superfici rappresentate dalla (2) siano identiche con quelle incluse nella (1).

Vediamo adesso se, con una traslazione di origine, si possano (§ 121) fare scomparire i termini lineari in x, y, z.

Ora, sostituendo le formole

$$x=x+a, \qquad y=y+b, \qquad z=z+c,$$

ed eguagliando a o nella nostra equazione i coefficienti di x, y, z, otterremo le equazioni di condizione,

$$2M''a+N''=o, \quad 2M'b+N'=o, \quad 2Mc+N=o,$$

onde $\quad a=-\dfrac{N''}{2M''}, \quad b=-\dfrac{N'}{2M'}, \quad c=-\dfrac{N}{2M}.$

Finchè coll' annullarsi i tre rettangoli non vie-

ne ad annullarsi alcun dei tre quadrati, le quantità M, M′, M″ sono diverse da o, e la nuova trasformazione è possibile; cioè, in altri termini, l'equazione può ridursi alla forma

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+P=o \quad . \; . \; . \; (3),$$

avendo P per valore

$$Mc^2+M'b^2+M''a^2+Nc+N'b+N''a+D.$$

344. Dal supporre che uno dei quadrati svanisca nel tempo stesso coi rettangoli, che si abbia, per esempio, $M''=o$, la precedente trasformazione non potrebbe eseguirsi, perchè allora la a diverrebbe *infinita*.

In questo caso, l'equazione avendo la forma

$$Mz^2+M'y^2+Nz+N'y+N''x+D=o,$$

potrebbe provarsi di fare scomparire i termini in z ed in y, come anche le quantità tutte cognite. In fatti, sostituendo le formole

$$x=x+a, \quad y=y+b, \quad z=z+c,$$

ed eguagliando a o il coefficiente di z, quello di y, e la quantità indipendente da x, y, z, si otterrebbe $2Mc+N=o$, $2M'b+N'=o$

$$Mc^2+M'b^2+Nc+N'b+N''a+D=o; \text{ onde}$$

$$c=-\frac{N}{2M},\; b=-\frac{N'}{2M'},\; a=-\frac{Mc^2+M'b^2+Nc+N'b+D}{N''},$$

valori *reali e finiti*, fin tanto che non si *annulla* N″; e l'equazione si riduce a quest'altra

$$Mz^2+M'y^2+N''x=o \quad . \; . \; . \; (4).$$

345. Quando sia nel tempo stesso $M''=o$, $N''=o$, l'ultima trasformazione riesce impossibile, poichè a si conserva *infinita*. Ma, in questo caso particolare, divenendo la (2)

$$Mz^2+M'y^2+Nz+N'y+D=o,$$

non contiene più che due variabili, e rappresenta ad evidenza (§ 315) *una superficie cilindrica* le di cui direttrici sono perpendicolari al piano delle yz, e che ha per base, o un' ellisse, o un' iperbole, secondo che, nell'addotta equazione, i coefficienti M, M' hanno lo stesso o l' opposto segno.

346. Supponiamo ancora che due dei quadrati y^2 ed x^2 siano scomparsi nel tempo stesso che i tre rettangoli, cioè che, per la prima trasformazione delle coordinate, l' equazione si riduca alla forma $Mz^2+Nz+N'y+N''x+D=o$,

si potrebbe, in questo caso, procurare di fare svanire qualchè termine; ma si rende ciò inutile per la determinazione della superficie rappresentata da questa equazione.

In fatti, facciamo successivamente

$$z=k, \quad z=k', \quad z=k'', \ldots$$

ciò che si riduce a tagliare la superficie con una serie di piani paralleli al piano delle xy; l'equazione diviene, in queste diverse ipotesi,

$$N'y+N''x=L; N'y+N''x=L'; N'y+N''x=L''\ldots$$

siegue di quì che le intersecazioni della superficie con i piani orizzontali, sono rette *parallele fra loro*. Perciò (§ 332) la superficie conserva la natura delle *superfici cilindriche*; e, volendosi conoscere una direttrice di questa superficie, basta porre $y=o$, per esempio, nella sua equazione.

Da tale ipotesi otterremo l' equazione

$$Mz^2+Nz+N''x+D=o,$$

che esprime una parabola posta nel piano delle xz.

Dunque finalmente, la superficie altro non è che *una superficie cilindrica* a base parabolica.

347. Riflettendo sulla precedente discussione, dovremo concludere che tutte le superfici di 2.° gr.° si trovano contenute implicitamente nelle due classi di equazioni

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+D=o, \quad Mz^2+M'y^2+N''x=o,$$

eccettuate quelle che corrispondono alle equazioni

$$Mz^2+M'y^2+Nz+N'y+D=o,$$

$$Mz^2+Nz+N'y+N'x+D=o,$$

che abbiam veduto appartenere a superfici cilindriche a base ellittica, iperbolica o parabolica.

348. *N. B.* Già s' intende che in queste tre varietà generali noi comprendiamo quelle che (§ 226) corrispondono alle varietà dell' ellisse, dell' iperbole, e della parabola. Perciò, quando l' ellisse si riduce ad un cerchio, o ad un punto, allora la superficie cilindrica diviene un cilindro a base circolare, o *una sola retta*. Se l' iperbole degenera in un sistema di due rette che si tagliano, la superficie cilindrica si riduce ad un sistema di *due piani che si tagliano*. Finalmente, quando la parabola si riduce a due rette parallele o ad una sola retta, la superficie cilindrica diviene *un sistema di due piani paralleli*, o *un' unico piano*.

349. Prima di passare a discutere ciascuna delle equazioni

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+P=o. \ . \ . \ (1),$$

$$Mz^2+M'y^2+N''x=o. \ . \ . \ (2)$$

faremo alcune osservazioni generali sulla natura delle superfici che esse rappresentano, e sopra i sistemi d' assi o di piani coordinati ai quali le superfici sono attualmente riferite.

Primieramente, la (1), non racchiudendo più i termini di primo grado in x, y, z, resta la

stessa quando vi si cangi $+x$, $+y$, $+z$, in $-x$, $-y$, $-z$; ciò che prova che qualunque retta condotta per la nuova origine, e terminata da una e dall' altra parte dalla superficie, è divisa in due parti eguali in questo punto. Dunque (§ 245) tutte le superfici comprese nella equazione (1) hanno un *centro* che non è altra cosa che l' origine attuale delle coordinate.

Osserveremo poi che l' equazione potrebbe racchiudere i rettangoli delle variabili come anche i quadrati, senza che la superficie cessasse di avere un centro, e d' essere riferita a questo centro come origine, poichè la condizione caratteristica del centro sarebbe ancora addempita. Potrebbe anche supporsi la superficie riferita ad assi obbliqui condotti da questa origine.

Perciò, nel caso di assi qualunque, un'equazione come

$$Az^2+A'y^2+A''x^2+Byz+B'xz+B''xy+D=o,$$

ove varj coefficienti possono esser nulli, rappresenta *una superficie che ha un centro*; e questo centro è l' origine.

Secondariamente, si chiama *piano diametrale* di una superficie un piano che divide in due parti eguali tutte le corde della superficie parallele fra loro e condotte con una qualunque direzione. Ora, dalla forma della equazione (1) che, venendo risoluta successivamente riguardo a ciascuna delle variabili, ci dà due valori eguali e con segni contrarj per questa variabile, è evidente che ciascuno dei tre piani coordinati divide in due parti eguali tutte le corde condotte parallelamente alla intersecazione comune degli altri due.

Dunque questi tre *piani* sono *diametrali*; di più, potremo riguardarli come costituenti *un sistema di piani diametrali conjugati perpendicolari fra loro*; ciò che corrisponde alla definizione

data (§ 131) di un sistema di diametri conjugati.

In terzo luogo : Consideriamo l' equazione (2). Poichè nel terzo termine ha luogo cangiamento di segno col sostituire $-x$, $-y$, $-z$ in luogo di $+x$, $+y$, $+z$, ne siegue che l' attuale origine delle coordinate non sia un centro. Abbiamo poi veduto (§ 344) che, qualora uno dei quadrati manchi insieme con i rettangoli, è impossibile di fare scomparire unitamente i tre termini del primo grado; dunque le superfici rappresentate dalla (2) sono *superfici prive di centro.*

Osserviamo ancora che, dei tre piani coordinati, due soltanto, i piani delle xy e delle xz possono essere riguardati come *piani diametrali*, poichè il primo divide in due parti eguali tutte le corde parallele all' asse delle z, ed il secondo tutte le corde parallele all' asse delle y.

Concludiamo da tutto ciò, che le superfici di secondo grado si dividono in due classi distinte, cioè: *le superfici* che hanno UN CENTRO, *e le superfici sprovviste di centro.*

Discussione della $Mz^2+M'y^2+M''x^2+P=o\ldots(1)$.

350. Per determinare i diversi generi di superfici rappresentate dalla (1), faremo successivamente (§ 323)

$$x=cost.,\quad y=cost.,\quad z=cost.:$$

ciò che si ridurrà a tagliare la superficie con i piani rispettivamente paralleli a ciascuno dei tre piani coordinati; ma si sa (§ 126) che la natura di queste intersecazioni dipende sopra tutto dai segni dai quali i coefficienti **M, M', M''**, sono affetti. Saremo perciò condotti a fissare le seguenti ipotesi:

1.° M, M', M'' *positivi* insieme.

In questa ipotesi generale, l' ultimo termine P può essere anch' esso negativo, o eguale a *o*, o positivo.

Primieramente sia P *negativo*, e si ponga in evidenza il segno; l' equazione diverrà

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2=P. \quad . \quad . \ (2).$$

Ciò posto, facendo successivamente nella (2)

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha, \\ y=\beta, \\ z=\gamma, \end{array}\right\} \text{ otterremo } \left\{\begin{array}{l} Mz^2+M'y^2=P-M''\alpha^2 \\ Mz^2+M''x^2=P-M'\beta^2, \\ M'y^2+M''x^2=P-M\gamma^2. \end{array}\right.$$

si scorge da ciò che le intersecazioni della superficie con i piani paralleli ai tre piani coordinati, sono ellissi che divengono *imaginarie*, qualora si supponga

$$\alpha^2>\frac{P}{M''} \quad \beta^2>\frac{P}{M'}, \quad \gamma^2>\frac{P}{M},$$

cioè α, β, γ positivi o negativi, ma aritmeticamente maggiori di

$$\sqrt{\left(\frac{P}{M''}\right)}, \sqrt{\left(\frac{P}{M'}\right)}, \sqrt{\left(\frac{P}{M}\right)}.$$

Queste ellissi si riducono ad *un punto*, facendo

$$\alpha=\pm\sqrt{\left(\frac{P}{M''}\right)}, \beta=\pm\sqrt{\left(\frac{P}{M'}\right)}, \gamma=\pm\sqrt{\left(\frac{P}{M}\right)},$$

perchè le equazioni delle intersecazioni divengono

$$Mz^2+M'y^2=o, \quad Mz^2+M''x^2=o, \quad M'y^2+M''x^2=o.$$

Dunque, la superficie da noi presa in considerazione è *limitata in tutti i sensi*; di più resta iscritta al parallelopipedo che ha per superficie i piani

$$x=\pm\sqrt{\left(\frac{P}{M''}\right)}, y=\pm\sqrt{\left(\frac{P}{M'}\right)}, z=\pm\sqrt{\left(\frac{P}{M}\right)}.$$

La natura delle intersecazioni di questa superficie con i piani paralleli ai tre piani coordinati, ha fatto darle il nome di ELLIPSOIDE.

Per determinare *le tre sezioni principali*, o, in altri termini, le traccie della superficie sopra i piani coordinati, basta di fare successivamente (fig. 183)

$$\left.\begin{array}{l} x=o, \\ y=o, \\ z=o, \end{array}\right\} \text{ ed otterremo } \left\{\begin{array}{l} Mz^2+M'y^2=P, \\ Mz^2+M''x^2=P, \\ M'y^2+M''x^2=P. \end{array}\right.$$

In quanto ai punti d'intersecazione con i tre assi, otterremo per

$$y=o,\ z=o,\ M''x^2=P, \text{ onde } x=\pm\sqrt{\left(\frac{P}{M''}\right)},$$

$$x=o,\ z=o,\ M'y^2=P; \text{ onde } y=\pm\sqrt{\left(\frac{P}{M'}\right)},$$

$$x=o,\ y=o,\ Mz^2=P; \text{ onde } z=\pm\sqrt{\left(\frac{P}{M}\right)}.$$

Le linee $AA'=2\sqrt{\frac{P}{M''}}$, $BB'=2\sqrt{\frac{P}{M'}}$,

$CC'=2\sqrt{\frac{P}{M}}$, sono chiamate *assi principali* della superficie; e la loro introduzione nella equazione dà a questa una forma simetrica analoga a quella della equazione dell' ellisse riferita al suo centro ed a suoi assi.

Poniamo in fatti

$$2A=2\sqrt{\frac{P}{M''}},\ 2B=2\sqrt{\frac{P}{M'}},\ 2C=2\sqrt{\frac{P}{M}},$$

e ne risulterà $M''=\frac{P}{A^2}$, $M'=\frac{P}{B^2}$, $M=\frac{P}{C^2}$;

e, sostituendo nella (2) e togliendo i denominatori

$$A^2B^2z^2+A^2C^2y^2+B^2C^2x^2=A^2B^2C^2 \ldots (3)$$

351. *Casi particolari.* Supponiamo che due qualunque dei tre coefficienti M, M′, M″ siano eguali fra loro, per esempio $M=M'$; ed avendosi $C=B$; diverrà l'equazione

$$A^2B^2z^2+A^2B^2y^2+B^2x^2=A^2B^4, \quad \text{e, divi-}$$

dendo per B^2, $A^2z^2+A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$.

Questa equazione, capace della forma

$$x^2+y^2=\frac{B^2}{A^2}(A^2-x^2), \text{ o } y^2+z^2=F(x),$$

caratterizza (§ 340) una superficie di rivoluzione fatta attorno l'asse delle x; poichè facendo $x=cost$, si ottiene $y^2+z^2=cost$; ciò che prova che qualunque sezione fatta perpendicolarmente all'asse delle x, è una circonferenza di cerchio.

Dalle due ipotesi successive $y=o$, $z=o$, abbiamo

$$A^2z^2+B^2x^2=A^2B^2, \quad A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2.$$

Sono queste le equazioni della generatrice considerata in tutte le sue posizioni, cioè: nel piano delle x e nel piano delle xy.

Se fosse $M=M''$, o $M'=M''$, si scorgerebbe egualmente che la superficie sarebbe di rivoluzione attorno l'asse delle y, ovvero attorno l'asse delle z.

352. Supponiamo ora $M=M'=M''$, onde $C=B=A$; la (3) si riduce alla $z^2+y^2+x^2=A^2$, e rappresenta *una superficie sferica* con il centro all'origine delle coordinate.

353. I coefficienti M, M′, M″ conservandosi sempre positivi e qualunque, eguali o ineguali, potrà aversi $P=o$, o P *positivo*.

Nel primo caso, l'equazione diviene

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2=o,$$

e non ammette che l'unico sistema di valori rea-

li $x=o$, $y=o$, $z=o$;
dunque la superficie si riduce ad *un punto*.

Nel secondo, l' equazione

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+P=o,$$

non ammette alcun sistema di valori reali. Perciò la superficie è *imaginaria*.

Concludiamo da ciò che, all' ipotesi generale di M, M', M'' *positivi* nel tempo stesso, corrisponde un solo genere di superfici, l' Ellipsoide, che comprende, come varietà, l'*ellipsoide di rivoluzione*, la *sfera*, un *punto* ed una *superficie imaginaria*.

2.° M, M' *positivi* ed M'' *negativo*.

354. Supponiamo prima M, M', P *positivi* ed M'' negativo. La (1) del n.° 350 diviene, dopo di aver posto in evidenza i segni,

$$Mz^2+M'y^2-M''x^2=-P. \ . \ . \ (2).$$

E, facendo successivamente $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$, otterremo per

$$x=\alpha. \ . \ . \ Mz^2+M'y^2=M''\alpha^2-P. \ . \ . \ (3)$$

$$y=\beta. \ . \ . \ Mz^2-M''x^2=-(M'\beta^2+P). \ . \ . \ (4)$$

$$z=\gamma. \ . \ . \ M'y^2-M''x^2=-(M\gamma^2+P). \ . \ . \ (5).$$

L' equazioni (4) e (5) provano che qualunque sezione fatta nella superficie, parallelamente al piano delle xz, o al piano delle xy, è un' *iperbole* il di cui asse trasverso ha una direzione parallela all' asse delle x.

La (3) rappresenta ad evidenza un' *ellisse reale* finchè si dà ad α un valore positivo o negativo, aritmeticamente maggiore di $\sqrt{\frac{P}{M''}}$, e ciò significa che, se da due distanze

$$OA = \sqrt{\frac{P}{M''}}, \quad OA' = -\sqrt{\frac{P}{M''}} \text{ (fig. 184)}$$

imagineremo due piani paralleli al piano delle yz, la superficie non ha alcun punto compreso fra questi piani, ma si estende indefinitamente a destra ed a sinistra di questi due piani, nel senso delle x positive e nel senso delle x negative ; d'onde può concludersi che questa superficie è composta di due parti distinte, eguali ed opposte. Ed è perciò, ed anche per la natura delle sue intersecazioni da piani paralleli a due dei piani coordinati, che si chiama Iperboloide *a due nappe*.

Le tre sezioni principali si ottengono col fare successivamente nella (2) $x=o$, $y=o$, $z=o$; ciò che ci dà

$$Mz^2+M'y^2=-P$$

$$Mz^2-M''x^2=-P$$

$$M'y^2-M''x^2=-P.$$

La prima sezione è imaginaria ; ma le due altre sono le iperboli MAM' ed mAm', NAN' ed nAn', riferite agli assi delle x come assi trasversi.

Sia $2A=2\sqrt{\frac{P}{M''}}$, $2B=2\sqrt{\frac{P}{M'}}$, $2C=2\sqrt{\frac{P}{M}}$,

ed avremo $M''=\frac{P}{A^2}$, $M'=\frac{P}{B^2}$, $M=\frac{P}{C^2}$; sostituendo nella (2), $A^2B^2z^2+A^2C^2y^2-B^2C^2x^2=-A^2B^2C^2$;

e delle tre linee $2A$, $2B$; $2C$, chiamate *assi principali* della superficie, la sola prima ha le sue due estremità A, A' (fig. 184) situate sopra la superficie. In quanto alle altre due, si è convenuto di farle rappresentare sopra la figura da due distanze BB', CC', valutate sopra gli assi delle

y e delle z; ma i punti B, B', C, C', non appartengono alla superficie, come nella ellipsoide. In somma, l' iperboloide a due nappe ha un solo asse *trasverso* e due altri *non trasversi*.

355. Siano adesso M, M' *positivi*, ed M'', P *negativi*, la (1) diviene $Mz^2+M'y^2-M''x^2=+P$,

e se ne deduce successivamente per

$$x=\alpha \ . \ . \ . \ Mz^2+M'y^2=M''\alpha^2+P,$$
$$y=\beta \ . \ . \ . \ Mz^2-M''x^2=-M'\beta^2+P,$$
$$z=\gamma \ . \ . \ . \ M'y^2-M''x^2=-M\gamma^2+P.$$

La prima rappresenta un' ellisse sempre reale, qualunque siasi α; e le altre due, le iperboli riferite all' asse delle x, come asse *trasverso*, o *non trasverso*, secondo che avremo

$$\beta^2<\frac{P}{M'},\ \gamma^2<\frac{P}{M},\ \text{o}\ \beta^2>\frac{P}{M'},\ \gamma^2>\frac{P}{M}$$

Si scorge dunque che, nel caso attuale, non esiste veruna discontinuità nella superficie che, per tal ragione, porta il nome d' IPERBOLOIDE *ad una sola nappa*.

Le ipotesi successive $x=o$, $y=o$, $z=o$, (fig. 185) ci danno

$$Mz^2+M'y^2=P,\quad Mz^2-M''x^2=P,\quad M'y^2-M''x^2=P.$$

L' ellisse, rappresentata da questa prima equazione, è la più piccola di tutte quelle che ottengonsi tagliando la superficie con piani paralleli al piano delle yz.

Le altre due esprimono le iperboli situate l'una nel piano delle xz, l' altra nel piano delle xy, aventi per asse *non-trasverso*, l' asse delle x.

E tanto basta per dare un' idea a bastanza esatta della superficie i di cui due assi principali sono *trasversi*, ed il terzo *non trasverso*.

Sia $2A=2\sqrt{\frac{P}{M''}}$, $2B=2\sqrt{\frac{P}{M'}}$, $2C=2\sqrt{\frac{P}{M}}$,

troveremo $M''=\frac{P}{A^2}$, $M'=\frac{P}{B^2}$, $M=\frac{P}{C^2}$;

e, sostituendo,

$$A^2B^2z^2+A^2C^2y^2-B^2C^2x^2=+A^2B^2C^2.$$

356. *Casi particolari* di due iperboloidi.

Primieramente, sia $M=M'$, onde $C=B$; le equazioni di due superfici si ridurranno a

$$A^2z^2+A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2,$$
$$A^2z^2+A^2y^2-B^2x^2=+A^2B^2;$$

ed otterremo $\quad z^2+y^2=F(x)$.

Dunque le due iperboloidi divengono superfici di rivoluzione attorno l'asse delle x.

357. *Secondariamente*, siano M, M' *positivi*, M'' *negativo*, e P *eguale a o*. L'equazione diviene $Mz^2+M'y^2-M''x^2=o$; e se ne deduce

$$\frac{y^2}{z^2}=\frac{M''}{M'}\cdot\frac{x^2}{z^2}-\frac{M}{M'},$$

ovvero, $\quad \frac{y}{z}=F\left(\frac{x}{z}\right)$;

dunque (§ 335) la superficie si trova, in tal caso, degenerata in una *superficie conica*, il di cui centro è nell' origine delle coordinate.

358. Riprendendo quanto si è ora detto riguardo alla seconda ipotesi generale, si vede che questa ipotesi da luogo a due generi primarj di superfici, le iperboloidi ad una o due nappe, che racchiudono, come varietà, l'*iperboloide di rivoluzione* e la *superficie conica*.

359. *Osservazione.* Non verrà qui da noi con-

siderato il caso in cui due dei coefficienti M, M', M'' fossero negativi, poichè, cangiando i segni, tornerebbe ad aversi quello ove due di questi coefficienti sono positivi, essendo poi P positivo o negativo.

Perciò, la $Mx^2+M'y^2+M''z^2+P=o$, non concontiene in realtà che tre generi primarj di superfici.

Discussione dell' equazione

$$Mz^2+M'y^2+N''x=o.$$

Possono anche qui presentarsi due casi principali: M ed M' possono avere *lo stesso segno*, o *segni contrarj*,

1.° M, M' siano *positivi* nel tempo stesso.

360. In questa 1.ª ipotesi, N'' può indifferentemente essere negativo o positivo.

Supponiamolo prima *negativo*, e poniamo il segno in evidenza; l' equazione prende la forma

$$Mz^2+M'y^2=N''x.$$

E facendo successivamente $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$, si ottiene

$$Mz^2+M'y^2=N''\alpha,\ Mz^2=N''x-M'\beta^2,$$
$$M'y^2=N''x-M\gamma^2.$$

La 1.ª equazione è ad evidenza quella di una ellisse sempre *reale*, finchè α è positivo, e diviene sempre più grande col crescere di α. Se si suppone $\alpha=o$, l' ellisse si riduce ad un punto, ed allora diviene imaginaria quando si suppone negativo α. Si vede dunque che la superficie si estende indefinitamente nel senso delle x positive, e che non ha alcun punto a sinistra del piano delle yz, al quale essa è tangente, nella stessa origine delle coordinate.

Le altre due equazioni rappresentano delle pa-

rabole con l'asse principale diretto parallelamente all' asse delle x, nel senso delle x positive.

Le paraboli corrispondenti alla ipotesi $y=\beta$, hanno tutte lo stesso parametro $\frac{N''}{M}$; mentre $\frac{N''}{M'}$ è il parametro costante di quelle che corrispondono a $z=\gamma$.

Facendo $y=o$, poi $z=o$, si trova (fig. 186)

$$z^2=\frac{N''}{M}x,\quad y^2=\frac{N''}{M'}x,$$

per le due sezioni primarie, a seconda dei piani delle xz e delle xy.

Dopo tali dati, è facile il formarsi un' idea chiara del nuovo genere di superfici, al quale si è dato il nome di PARABOLOIDE ELLITTICA.

Sia ora N'' positivo, caso che riduce l' equazione a $$Mz^2+M'y^2=-N''x,$$
mentre che; col cangiar x in $-x$, riprende la forma $$Mz^2+M'y^2=N''x;$$
e ne siegue che la superficie è la stessa come nel caso di N'' negativo; soltanto che si estende essa nel senso delle x negative come si estendeva prima nel senso delle x positive.

361. La paraboloide ellittica diviene una superficie di rivoluzione attorno l'asse delle x nel caso particolare di $M=M'$, perchè allora abbiamo

$$z^2+y^2=\frac{N''}{M}x=F(x);$$

ciò che dimostra che qualunque sezione fatta perpendicolarmente all' asse delle x è una circonferenza di cerchio con il centro sopra quest' asse.

2.° M *positivo* ed M' *negativo*.

362. Ci basterà considerare in questa nuova ipo-

tesi, come nella precedente, il caso in cui N'' è negativo; poichè si N'' fosse positivo, si sostituirebbe $-x$ ad x, ciò che varierebbe soltanto la situazione della superficie, ma non già la sua natura.

Ponendo il segno in evidenza, avremo

$$Mz^2 - M'y^2 = N''x.$$

Ciò posto, si faccia successivamente

$$x=\alpha, \quad y=\beta, \quad z=\gamma, \qquad \text{ed avremo}$$

$$Mz^2 - M'y^2 = N''\alpha, \quad Mz^2 = N''x + M'\beta^2,$$
$$M'y^2 = -N''x + M\gamma^2.$$

Le ultime due equazioni rappresentano ancora delle paraboli con l'asse principale parallelo all'asse delle x; ma quelle, che corrispondono ad $y=\beta$, sono dirette nel senso delle x positive, ed hanno per parametro costante $\frac{N''}{M}$; mentre che le paraboli corrispondenti a $z=\gamma$ sono al contrario dirette nel senso delle x negative, ed hanno per parametro costante $-\frac{N''}{M'}$.

La prima equazione appartiene ad una serie d'iperboli che hanno per asse trasverso una parallela all'asse delle z, essendo α positivo, ed una parallela all'asse delle y per ogni valor negativo di α.

Le due sezioni principali con i piani delle xz e delle xy sono $Mz^2 = N''x$, $M'y^2 = -N''x$ (fig. 187), cioè due parabole COC', B'OB.

La sezione con il piano delle yz, avendo per equazione $x=o$, $Mz^2 - M'y^2 = o$, o $z = \pm y\sqrt{\frac{M'}{M}}$, si riduce ad un sistema di due rette che si tagliano nell'origine.

Deve osservarsi che alle iperboli, rappresentate da $Mz^2 - M'y^2 = N''\alpha$, competono per assintoti due rette che hanno per equazione $Mz^2 - M'y^2 = o$; d'onde siegue che i piani, condotti per queste rette e per l'asse delle x, determinino sopra e sotto il piano delle xy due angoli diedri, che comprendono l'intera superficie; e possono considerarsi questi due piani come *piani assintoti* rapporto alla superficie.

Questo nuovo genere di superfici, essendo caratterizzato dalle sezioni paraboliche ed iperboliche, si chiama Paraboloide Iperbolica.

Siccome i coefficienti di z^2 e di y^2 hanno i segni contrarj, l'ipotesi $M = M'$ non può rendere la superficie di rivoluzione. Altronde, come or ora vedremo, qualunque sia la posizione del piano, con il quale vien tagliata questa superficie, *è impossibile l'ottenere per sezione una curva limitata*, e perciò una circonferenza di cerchio.

363. Per la *paraboloide iperbolica*, superficie molto difficile a rappresentarsi, faremo conoscere un mezzo di generazione, comune alle due paraboloidi, che sarà addattatissimo a darci un'idea esatta sì dell'una che dell'altra. Questo mezzo, molto analogo a quello già addottato (§ 296) per il piano, consiste nel *fare scorrere una parabola* che ha per equazioni

$$y = o, \quad Mz^2 + N''x = o,$$

nella direzione di un'altra parabola

$$z = o, \quad M'y^2 + N''x = o,$$

in guisa tale che il vertice della prima, chiamata *generatrice*, si trovi costantemente situato sopra la seconda che può chiamarsi la *direttrice*.

Risulta ad evidenza da questo modo di generazione, che le equazioni della generatrice, considerata in una qualunque delle sue posizioni, debbano aver la forma

$$y=\beta\,,\quad Mz^2+N''x+\alpha=o.$$

Il parametro di questa parabola mobile, o $-\frac{N''}{M}$, resta costante; ma, siccome il vertice, che prima è situato nell'origine, occupa poi una qualunque posizione sopra la direttrice, ne siegue che la seconda equazione debba racchiudere un termine α indipendente da x e da y.

Ciò posto, osserviamo che, per ogni punto della superficie, situato sopra la stessa generatrice, le distanze del piano delle xz dalla posizione del vertice di questa generatrice restano le stesse; ma allorchè il punto passa da una ad un'altra generatrice, è allora che i due elementi, di cui parliamo, devono necessariamente variare.

Dunque le quantità β ed α, corrispondenti a questi elementi, sono quantità *costanti* insieme, e *variabili* insieme: e perciò devono esse dipendere in una certa maniera l'una dall'altra. Otterremo questa relazione esprimendo coll'analisi, che la generatrice e la direttrice s'incontrano, cioè fisseremo l'esistenza nel tempo stesso delle equazioni

$$y=\beta\,,\quad Mz^2+N''x+\alpha=o\;\ldots\;(1)$$

$$z=o\,,\quad M'y^2+N''x=o\;\ldots\;(2).$$

Primieramente, il valore $z=o$, posto nella 2.ª delle (1) ci dà

$$x=-\frac{\alpha}{N''}.$$ I valori $y=\beta$, $x=-\frac{\alpha}{N''}$ se si sostituiranno poi nella 2.ª delle (2), ci daranno

$$M'\beta^2-\alpha=o\;\ldots\;(3).$$

E questa è la relazione che lega fra loro le quantità α, β, e che deve esistere nel tempo stesso

che le equazioni (1) per tutte le posizioni della generatrice, cioè per tutti i punti della superficie.

Non trattandosi ora che di eliminare α, β fra queste tre equazioni; perciò basterà sostituire ad α, β i loro valori dedotti dalle (1); ed otterremo

$$M'y^2-(-Mz^2-N''x)=o \text{ , o } Mz^2+M'y^2+N''x=o,$$

cioè l'equazione stessa delle due paraboloidi.

Quando siano *positivi* M, M' (fig. 186), ed N'' *negativo*, i parametri della parabola generatrice e della parabola direttrice sono $\frac{N''}{M}$, $\frac{N''}{M'}$, quantità *collo stesso segno*; dunque gli assi sono diretti nello stesso senso.

Ma se fosse *positivo* Mc (fig. 187) M', *negativo* ed N'' *negativo*, i parametri sarebbero $\frac{N''}{M}$, $\frac{-N''}{M'}$, cioè *con segno contrario*; dunque gli assi di queste paraboli sono diretti in senso contrario l'uno riguardo l'altro.

364. Dalla precedente discussione risulta che le superfici del secondo grado si dividono in cinque generi:

1.° L'ELLIPSOIDE, le di cui varietà sono *l'ellipsoide di rivoluzione*, la *sfera*, un *punto* o una *superficie imaginaria:*

2.° 3.° L'IPERBOLOIDE a due nappe e l'IPERBOLOIDE ad una nappa, avendo ambedue per varietà l'*iperboloide di rivoluzione* e la *superficie conica*:

4.° La PARABOLOIDE ELLITTICA, che ha per varietà la *paraboloide di rivoluzione*:

5.° Finalmente, la PARABOLOIDE IPERBOLICA che non offre varietà alcuna.

Tuttavia, le *superfici cilindriche* a base ellittica, iperbolica, o parabolica (§ 345, 346) sono superfici che si associano colle paraboloidi, poichè si

sono ottenute col supporre che uno dei quadrati, o due dei quadrati, venissero a scomparire nel tempo stesso che i rettangoli dall' equazione generale.

365. Rintracciamo adesso di qual natura possano essere le intersecazioni delle superficì di secondo grado con piani situati in qualunque guisa riguardo a queste superficì; considerando prima tutte quelle che hanno un *centro*.

Basta per ciò (§ 323) sostituire nella

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+P=o \quad . \; . \; . \; (1)$$

in luogo di x, y, z, i loro valori dedotti dalle

$$x=x\cos\varphi+y\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi+a,$$

$$y=x\,\text{sen}\,\varphi-y\cos\theta\cos\varphi+b,$$

$$z=y\,\text{sen}\,\theta+c,$$

Otterremo con ciò un risultato colla forma

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=o \quad . \; . \; . \; (2),$$

i di cui coefficienti hanno per valori

$$A=M.\text{sen}^2\theta+M'\cos^2\theta\cos^2\varphi+M''\cos^2\theta\,\text{sen}^2\varphi.$$

$$B=(M''-M').2\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi,$$

$$C=M'\text{sen}^2\varphi+M''\cos^2\varphi,$$

$$D=2Mc\,\text{sen}\,\theta-2M'b\cos\theta\cos\varphi+2M''a\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi,$$

$$E=2M'b\,\text{sen}\,\varphi+2M''a\cos\varphi,$$

$$F=Mc^2+M'b^2+M''a^2+P$$

Ora, sappiamo (§ 226) che la natura della curva rappresentata dalla (2) dipende principalmente dalla quantità B^2-4AC, la quale, secondo che è negativa, o positiva, o nulla, corrisponde ad un'ellisse, o ad un'iperbole, o ad una parabola, ovvero a qualchuna delle varietà di queste curve.

Calcolando quest' espressione, otterremo

$-M'M''\cos^2\theta - MM'\text{sen}^2\theta\text{sen}^2\varphi - MM''\text{sen}^2\theta\cos^2\varphi$.

Ciò posto, se la superficie è un' ellipsoide, i tre coefficienti M, M', M'' sono positivi, e l' espressione precedente è essenzialmente *negativa*. Dunque l' intersecazione di un' ellipsoide con un piano è sempre un' ellisse, o una delle varietà di questa curva.

Ma per le iperboloidi ad una o due nappe, due dei tre coefficienti sono positivi ed il terzo negativo; ovvero, uno è positivo e gli altri due negativi; perciò l' espressione qui sopra addotta, racchiudendo termini positivi e negativi, può, secondo i valori aritmetici di M, M', M'', φ, θ, divenire positiva, o negativa, o eguale a *o*. Dunque l' intersecazione di una iperboloide con un piano può essere una iperbole, una ellisse, o una parabola.

La superficie conica che, come si è veduto, è una varietà di questo genere di superfici, dà luogo egualmente a questi tre generi di curve. (ved. § 137 e i successivi).

366. Riprendendo li stessi calcoli riguardo alle paraboloidi che hanno per equazione generale

$$Mx^2+M'y^2+N''x=o\,;$$

otterremo, per i coefficienti di y^2, xy, x^2,

$$A=M\text{sen}^2\theta+M'\cos^2\theta\cos^2\varphi\,,$$

$$B=-2M'\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi\,,$$

$$C=M'\text{sen}^2\varphi\,;\qquad\text{onde}$$

$$B^2-4AC=-MM'\text{sen}^2\theta\text{sen}^2\varphi.$$

Nel caso del paraboloide ellittico, i coefficienti M, M' hanno lo *stesso segno*; perciò B^2-4AC è essenzialmente *negativo*, e l' intersecazione è in generale un' ellisse.

Tuttavia dal supporre sen $\varphi=o$, o sen $\theta=o$,

ne risulta $B^2-4AC=o$, e l'intersecazione è una parabola.

L'ipotesi sen $\varphi=o$ corrisponde (§ 323) al caso in cui la traccia del piano secante sopra il piano delle xy, è parallela all'asse delle x; ciò che vuole che anche il piano secante sia *parallelo a quest' asse.*

L' ipotesi sen $\theta=o$ significa che il piano secante dev' essere parallelo al piano delle xy.

Possiamo da ciò concludere che le intersecazioni di una paraboloide ellittica non possono essere che ellissi, o parabole, o varietà di queste curve.

In quanto al paraboloide iperbolico, siccome M, M' hanno segni contrarj, B^2-4AC, o $-MM'\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi$, non può essere che positivo o eguale a o Dunque le intersecazioni non potrebbero esser mai o ellissi o varietà di queste curve (ved. § 362).

367. Vediamo adesso qual posizione dovrebbedarsi al piano secante affinchè le intersecazioni fossero *circonferenze di cerchio.*

A tale oggetto convien porre (§ 365) $B=o$, ed $A=C$ per per avere le due equazioni di condizione

$$(M''-M')\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi=o \;.\;.\;.\;(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}M\operatorname{sen}^2\theta+M'\cos^2\theta\cos^2\varphi\\ \quad+M''\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi\end{array}\right\}=M'\operatorname{sen}^2\varphi+M''\cos^2\varphi\ldots(2).$$

E siccome, in generale, M'' è diverso da M', perciò la (1) non può venire addempita che dalle tre ipotesi $\cos\theta=o$, sen $\varphi=o$, cos $\varphi=o$, che ora esamineremo.

1.° $\cos\theta=o$, onde $\operatorname{sen}\theta=1$; la (2) diviene

$$M=M'\operatorname{sen}^2\varphi+M''\cos^2\varphi\;;$$

ma (t.° 3.° § 87)

$$\operatorname{sen}^2\varphi=\frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{1+\operatorname{tang}^2\varphi},\quad \cos^2\varphi=\frac{1}{1+\operatorname{tang}^2\varphi},$$

dunque, sostituendo, avremo

$$M(1+\tang^2\varphi)=M'\tang^2\varphi+M'' ;$$ onde

$$\tang\varphi=\pm\sqrt{\left(\frac{M''-M}{M-M'}\right)}$$

2.° $\sen\varphi=o$, onde $\cos\varphi=1$; perciò la (2) ci darà

$$M\sen^2\theta+M'\cos^2\theta=M'' ;$$ ovvero

$$\ang^2\theta+M'=M''(1+\tang^2\theta) ;$$ dunque

$$\tang\theta=\pm\sqrt{\left(\frac{M''-M'}{M-M''}\right)} :$$

3.° $\cos\varphi=o$, onde $\sen\varphi=1$; e la (2) riducesi ad

$$M\sen^2\theta+M''\cos^2\theta=M' ,$$ onde

$$M\tang^2\theta+M''=M'(1+\tang^2\theta) ;$$ dunque

$$\tang\theta=\pm\sqrt{\left(\frac{M'-M''}{M-M'}\right)}.$$

Esaminiamo questi valori di tang φ, e di tang θ che possono essere reali o imaginarj, secondo le ipotesi che possono farsi sopra i coefficienti M, M', M''.

Se le quantità sotto i tre radicali si moltiplicheranno fra loro otterremo $\frac{(M-M'')^2}{(M-M')^2}$ cioè un prodotto essenzialmente *positivo*; ciò che dimostra, prima, che una almeno, di queste tre quantità, è positiva; ma se la prima, per esempio, è positiva, saranno le altre due negative.

In fatti, affinchè la quantità sotto il primitivo vincolo radicale sia positiva, bisogna che M''—M ed M—M' abbiano il medesimo segno, cioè bisogna che sia nel tempo stesso $\begin{matrix}(M''-M)>, & o < o, \\ (M-M')>, & o < o,\end{matrix}$

onde ; addizionando , $M'' - M' > , \ o \ < o.$ o

Si vede dunque che $M'' - M'$ ed $M - M''$, hann segni contrarj ; perciò è negativo $\frac{M' - M''}{M - M'}$.

Così si dimostrerebbe che, se fosse positiva la seconda o la terza, sarebbero le altre due negative.

Concludiamo da ciò che, fra i tre sistemi

$$\cos\theta = o\ ,\ \operatorname{tang}\varphi = \pm\sqrt{\left(\frac{M'' - M}{M - M'}\right)},$$

$$\operatorname{sen}\varphi = o\ ,\ \operatorname{tang}\theta = \pm\sqrt{\left(\frac{M' - M'}{M - M''}\right)},$$

$$\cos\varphi = o\ ,\ \operatorname{tang}\theta = \pm\sqrt{\left(\frac{M' - M''}{M - M'}\right)},$$

ve ne è uno che è sempre reale ; ma non ve ne è mai più di uno.

Altronde poi, siccome a ciascuna ipotesi, $\cos\theta = o$, o sen $\varphi = o$, o $\cos\varphi = o$, corrispondono due valori per la tangente dell' altro angolo , ne siegue che *potremo sempre far passare , per ciascun punto di una delle superfici di secondo grado che hanno* UN CENTRO , *due piani che taglino questa superficie a seconda di una circonferenza di cerchio.*

(La proprietà della sezione antiparallela alla base, nel cono obliquo (§ 141) , non è che un caso particolare di questa qui).

Se richiameremo il significato che dato abbiamo (§ 323) alle quantità φ e θ, ci sarà agevole lo scorgere che le ipotesi di $\cos\theta = o$, $\cos\varphi = o$, $\operatorname{sen}\varphi = o$, corrispondono ai piani rispettivamente perpendicolari ai piani delle tre sezioni principali.

E perciò , $\cos\theta = o$ indica , che il piano secante è perpendicolare al piano delle xy; $\cos\varphi = o$, che

è perpendtcolare al piano delle xz; e sen$\varphi=o$, che è perpendicolare al piano delle yz.

Supponiamo adesso che la superficie sia di rivoluzione, cioè che abbiasi $M=M'$ (§ 351 e 356); i tre sistemi si ridurranno a

$$\cos\theta=o\,,\ \tang\varphi=\infty\,,\ \text{o}\ \cos\varphi=o\,,$$

$$\text{sen}\varphi=o\,,\ \tang\theta=\pm\sqrt{-1}\,,$$

$$\cos\varphi=o\,,\ \tang\theta=\infty\,,\ \text{o}\ \cos\theta=o.$$

Il secondo sistema è evidentemente imaginario. In quanto agli altri due, si riduce l' uno all' altro e significano che non vi è che un piano perpendicolare all' asse delle x che possa produrre una circonferenza di cerchio.

368. Alle precedenti conseguenze convengono alcune modificazioni per i due paraboloidi,

I coefficienti A, B, C della trasformata equazione, (§ 366) hanno per valori

$$A=M\text{sen}^2\theta+M'\cos^2\theta\cos^2\varphi\,,$$

$$B=-2M'\cos\theta\,\text{sen}\varphi\cos\varphi\,;$$

$$C=M'\text{sen}^2\varphi\,;$$

ciò che ci fa vedere essere innammissibile l' ipotesi di sen$\varphi=o$, qualora si voglia che l' intersecazione sia una circonferenza di cerchio, poichè questa supposizione renderebbe $C=o$, mentre che questo coefficiente deve esistere nel caso del cerchio.

Perciò le due condizioni $B=o$, $A=o$ divengono

$$\cos\theta\cos\varphi=o\,,\ \text{ed}\ M\text{sen}^2\theta=M'\text{sen}^2\varphi\,,$$

equazioni che vengono addempite col supporre

$$\cos\theta=o\,,\ \text{onde}\ \text{sen}\varphi=\pm\sqrt{\frac{M}{M'}},\ \text{e col supporre}$$

$$\cos\varphi=o,\quad \text{onde}\quad \text{sen}\theta=\pm\sqrt{\frac{M'}{M}}.$$

Questi due sistemi sono necessariamente imaginarj nel caso del *paraboloide iperbolico*, poichè M ed M′ hanno segni contrarj (risultato che si accorda con quanto si disse § 366). Per il paraboloide ellittico, il primo sistema solo è ammissibile; ed il secondo inammissibile quando sia $M>M'$: ha luogo il contrario nel caso di $M<M'$.

Sia finalmente $M=M'$: ne risulterà

$$\cos\theta=o\,,\ \text{e}\ \operatorname{sen}\varphi=\pm 1\,,\ \text{o}\ \cos\varphi=o\,,\ \text{ovvero}$$

$$\cos\varphi=o\,,\ \text{onde}\ \operatorname{sen}\theta=\pm 1\,;\quad \text{o}\quad \cos\theta=o\,;$$

d'onde si vede che questi due sistemi riduconsi l'uno nell'altro, e significano che il piano secante è perpendicolare all'asse delle x.

369. *Osservazione*. Siccome le condizioni $B=o$, $A=C$ non determinano che gli angoli θ, φ, e non le coordinate a, b, c, ne siegue che per ciascuna superficie di secondo grado (eccettuato il paraboloide iperbolico) *esistano due sistemi di piani, di numero infiniti, che danno le circonferenze di cerchio; ed i piani di ciascun sistema sono paralleli fra loro*. Tuttavia, se la superficie è di rivoluzione, i due sistemi si riducono ad un solo.

Potremo disporre, per es. delle costanti indeterminate a, b, c, in modo che l'origine delle coordinate sia nel centro della sezione; ma da ciò si richiede che nella trasformata del n. 365, i termini D, E, siano nulli. Ora se porremo

$$2Mc\operatorname{sen}\theta-2M'b\cos\theta\cos\varphi+2M''a\cos\theta\operatorname{sen}\varphi=o\,,$$

$$2M'b\operatorname{sen}\varphi+M''a\cos\varphi=o\,,$$

otterremo due equazioni lineari in a, b, c; ciò che prova che, per ogni sistema di piani secanti, *i centri di tutti i cerchj sono situati sopra una stessa linea retta*. E in altri termini, *ogni superficie di secondo grado*, ad eccezione del parabo-

loide iperbolico, *può essere generata in due maniere dal movimento di un cerchio sempre parallelo a se stesso, e di raggio variabile.*

Piani tangenti alle superfici di secondo grado.

370. In quella guisa che si definì la tangente in un qualunque punto (§ 63) essere l' elemento di questa curva prolungato indefinitamente, così *il piano tangente in un determinato punto di una superficie* verrà da noi considerato come *l' elemento di questa superficie prolungato indefinitamente.*

Ma l' elemento della superficie in un qualunque punto vien composto da tutti gli elementi delle curve che si otterrebbero tagliando la superficie con una serie di piani che passassero per questo punto, e siccome questi stessi elementi altro non sono che le tangenti alle curve, in questo punto, risulta da tutto ciò che il piano tangente sia ancora *il luogo di tutte le tangenti delle differenti curve che possono imaginarsi sopra la superficie a traverso del punto dato*; e che la sua posizione venga determinata dal conoscer quella di due sue tangenti.

Quest' ultima riflessione ci servirà per l' equazione del piano tangente. Primieramente sia

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+P=o. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

l' equazione generale delle superfici *aventi un centro*; e chiamiamo x', y', z' le coordinate del punto dal quale vuol condursi un piano tangente alla superficie; avremo da cio la

$$Mz'^2+M'y'^2+M''x'^2+P=o. \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Adesso, se, a traverso di questo punto, imagineremo successivamente due piani paralleli al piano delle xz ed al piano delle yz, otterremo per le equazioni delle intersecazioni della superficie mediante questi due piani

$$y=y', \quad Mz^2+M''x'^2+M'y'^2+P=o,$$

$$x=x', \quad Mz^2+M'y^2+M''x'^2+P=o;$$

e per le equazioni delle tangenti a queste sezioni, nel punto x', y', z, (ved. § 262)

$$y=y', \quad Mzz'+M''xx'+M'y'^2+P=o. \quad . \quad . \ (3)$$

$$x=x', \quad Mzz'+M'yy'+M''x'^2+P=o. \quad . \quad . \ (4)$$

Ora, il piano tangente dovendo, da quanto si disse di sopra, passare per queste due tangenti, il quesito verrà ridotto a trovare l'equazione di un piano che passa per le due rette delle quali si hanno le equazioni.

Primieramente, dovendo il piano passare per il punto x', y', z', la sua equazione avrà la forma

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=o \ldots (5).$$

Basterà adesso di esprimere che questo piano, che racchiude già un punto comune alle due rette, è parallelo a ciascuna di esse.

Avremo, perciò (§ 301) le due condizioni

$$Aa+Bb+C=o, \quad Aa'+Bb'+C=o.$$

Ma alle (3) e (4) puol darsi la forma

$$x=-\frac{Mz'}{M''x'}.z-\frac{M'y'^2+P}{M''x'}, \quad y=o.z+y',$$

$$x=o.z+x', \quad y=-\frac{M'z'}{M'y'}.z-\frac{M''x'^2+P}{M'y'},$$

onde $a=-\dfrac{Mz'}{M''x'}$, $b=o$, $a'=o$, $b'=-\dfrac{Mz'}{M'y'}$;

dunque le due relazioni di sopra diverranno

$$A\times-\frac{Mz'}{M''x'}+C=o, \text{ cioè } A=\frac{M''x'}{Mz'}.C,$$

$$B\times-\frac{Mz'}{M'y'}+C=o\text{, cioè } B=\frac{M'y'}{Mz'}.C$$

Questi valori sostituiti nella (5) ci daranno infine

$$Mz'(z-z')+M'y'(y-y')+M''x'(x-x')=o\ldots(6),$$

o sviluppando, ed avendo in considerazione la (2),

$$Mzz'+M'yy'+M''xx'+P=o,$$

equazione che non diversifica dall' equazione di superficie, se non in quanto che i quadrati z^2, y^2, x^2, vengono rimpiazzati dai rettangoli zz', yy', xx'.

371. Passiamo adesso alle superfici *prive di centro*. L' equazione generale delle paraboloidi essendo

$$Mz^2+M'y^2+2N''x=o\quad.\quad.\quad(1);$$

(vedremo or ora perchè si suppone che il coefficiente di x sia eguale a $2N''$), otterremo per il punto della superficie le di cui coordinate sono x', y', z',

$$Mz'^2+M'y'^2+2N''x'=o.\quad.\quad.\quad(2).$$

Le equazioni delle intersecazioni della superficie mediante i due piani paralleli ai piani delle xz ed yz, passando per il punto (x', y', z') sono (§ 262)

$$y=y',\ Mz^2+2N''x+M'y'^2=o,$$
$$x=x',\ Mz^2+M'y^2+2N''x'=o;$$

e quelle delle tangenti a queste curve, condotte per lo stesso punto, sono

$$y=y',\ Mzz'+N''(x+x')+M'y'^2=o,$$
$$x=x',\ Mzz'+M'yy'+2N''x'=o.$$

Adesso, dovendo passare il piano tangente per il punto x', y', z', la sua eqnazione avrà la forma

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=o\ldots(3);$$

le relazioni che esprimono che questo piano è pa-

rallelo alle due rette, essendo sempre $Aa+Bb+C=o$, $Aa'+Bb'+C=o$, avremo qui

$$a=-\frac{Mz'}{N''},\ b=o,\ a'=o,\ b'=-\frac{Mz'}{M'y'},$$

ciò che ci dà per le due relazioni,

$$A\times-\frac{Mz'}{N''}+C=o,\ \text{cioè}\ A=\frac{N''}{Mz'}.\ C,$$

$$B\times-\frac{Mz'}{M'y'}+C=o,\ \text{cioè}\ B=\frac{M'y'}{Mz'}.\ C.$$

Questi valori, sostituiti nella (3), ci danno

$$N''(x-x')+M'y'(y-y')+Mz'(z-z')=o;$$

o, avendo riguardo alla (2),

$$Mzz'+M'yy'+N'(x+x')=o.$$

[il termine $2N''x$, o $N''x+N''x$, si trova cambiano in $N''x+N''x'$, o $N''(x+x')$].

372. Volendo ottenere le equazioni della *normale*, cioè della perpendicolare al piano delle tangenti, condotta dal punto di contatto (x', y', z'), basterebbe applicare i principj stabiliti (§ 303); il che non presenta alcuna difficoltà. Si rende perciò inutile l' arrestarci su di tal ricerca.

373. Possiamo invece proporci di *condurre un piano tangente ad una superficie di* 2.° gr.°, *per un punto preso fuori di questa superficie*.

Siano x'', y'', z'' le coordinate di questo punto; x', y', z' indichino sempre quelle del punto di contatto. Avremo fra queste coordinate le due relazioni

$$Mz'^2+M'y'^2+M''x'^2+P=o.\ .\ .\ (1)$$

$$Mz'z''+M'y'y''+M''x'x''+P=o.\ .\ .\ (2)$$

(non vengono qui riguardate che le superfici che hanno un centro).

Queste equazioni racchiudendo tre incognite x', y', z', non bastano per determinarle. Perciò, da un punto esteriore, puol condursi un'infinità di piani tangenti ad una superficie di secondo grado.

Dando alla x' una serie di valori arbitrarj, si dedurrebbero dalle equazioni i valori di x', z' corrispondenti a ciascuno dei valori di x'; e si otterrebbero così le coordinate dei punti di contatto di tutti i piani tangenti; ovvero, eliminando successivamente y' ed x', si otterrebbero due nuove equazioni in x', z', ed in y', z', che altro non sarebbero che le equazioni della curva che passa per tutti i punti di contatto; e questa curva potrebbe essere riguardata come la *base di una superficie conica il di cui centro sarebbe nel piano dato, e che includerebbe la proposta superficie di secondo grado.*

Altronde, l'equazione (2) essendo lineare in x', y', z', ne siegue che la curva di contatto sia *piana*; e poichè questa curva è situata sopra una superficie di secondo grado, possiamo concludere ancora (§ 365) che questa curva è di secondo grado come lo è la superficie conica di cui è essa la base.

374. Ultimeremo la teoria delle superfici di secondo grado colla dimostrazione di una proprietà molto curiosa dell' iperboloide ad una nappa e della paraboloide iperbolica. Questa proprietà, che puol dedursi con molta semplicità dal considerare il piano tangente, consiste *nel poter essere generata ciascuna di queste due superfici in due maniere differenti mediante il moto di una linea retta.*

Riprendiamo l' equazione delle superfici che hanno un centro,

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+P=0. \quad . \quad . \quad (1)$$

avremo (§ 370) per l' equazione del piano tangente a queste superfici $Mzz'+M'yy'+M''xx'+P=0 \cdot \cdot \cdot (2)$; le coordinate poi x', y', z', sono legate fra loro dalla relazione

$$Mz'^2+M'y'^2+M''x'^2+P=o \ldots (3).$$

Per determinare i punti che trovansi nel tempo stesso sopra la superficie e sopra il piano tangente, basta di combinare fra loro le (1) e (2). Ora, duplicando la (2) e poi sottraendola dalla somma dalle (1) e (3), otterremo la

$$M(z-z')^2+M'(y-y')^2+M''(x-x')^2=o \ldots (4)$$

equazione di una nuova superficie, i cui punti comuni con il piano tangente apparterranno ancora alla superficie proposta, poichè questa equazione può sostituirsi alla (1).

Osserveremo prima che, se i coefficienti M, M', M'' sono tutti tre positivi, la (4) non può restar soddisfatta che da $z=z'$, $y=y'$, $x=x'$. Dunque, in tal caso, che è quello dell' *ellipsoide*, il piano tangente *non ha che un punto comune con la superficie.*

Ma supponiamo che siano positivi M, M', e negativo M'', la (4) e la (2) diverranno

$$M(z-z')^2+M'(y-y')^2-M''(x-x')^2=o \ldots (5)$$

$$M zz'+M'yy'-M''xx'+P=o,$$

e restituiremo loro la forma (§ 370)

$$Mz'(z-z')+M'y'(y-y')-M''x'(x-x')=o \ldots (6)$$

Ciò posto, per riconoscere se le superfici rappresentate dalle equazioni (5) e (6) possano avere una retta comune, combineremo queste equazioni con quelle che sieguono:

$$x-x'=a(z-z'), \quad y-y'=b(z-z') \ldots (7)$$

che sono le equazioni di una retta che passa per il punto x', y', z'; e procureremo di determinare a, b mediante la condizione che la retta si trova intieramente sulle due superfici.

Ora, sostituendo nelle (5) e (6) i valori di $x-x'$, $y-y'$ dedotti dalle equazioni (7), troveremo

$$(z-z')^2(M+M'b^2-M''a^2)=o,$$

$$(z-z')(Mz'+M'by'-M''ax')=o,$$

ovvero, facendo astrazione dal fattore $z-z'$ che corrisponde al punto x', y', z', che supponiamo già che si trovi simultaneamente sulle due superfici e sulla retta,

$$M+M'b^2-M''a^2=o. \;.\;.\; (8)$$

$$Mz'+M'by'-M''ax'=o. \;.\;.\; (9).$$

Tali sono le relazioni che esprimono trovarsi la retta tutta intera sulle due superfici.

Dedurremo dalla equazione (9)

$$a=\frac{M'y'.b+Mz'}{M''x'};$$

d' onde, sostituendo nella (8) e ordinando

$$M'(M''x'^2-M'y'^2)b^2-2MM'y'z'.b=M^2z'^2-MM''x'^2;$$

dunque

$$b=\frac{MM'y'z'\pm\sqrt{[MM'M''x'^2(Mz'^2+M'y'^2-M''x'^2)]}}{M'(M''x'^2-M'y'^2)},$$

o, attesa la $Mz'^2+M'y'^2-M''x'^2+P=o$,

$$b=\frac{MM'y'z'\pm x'\sqrt{(-MM'M''.P)}}{M'(M''x'^2-M'y'^2)}.$$

Calcolato il valore di b, verrà sostituito nella espressione di a per ottenere il valore di questa seconda indeterminata.

Ci resta adesso a sapere in qual caso la b sarà suscettibile di una *determinazione reale*. Ora ciò non può accadere (attesochè M, M', M'' si suppongono qui essenzialmente positivi) che fino a tanto che sia P *negativo*; condizione corrispondente (§ 355) all' *iperboloide ad una nappa*.

Dunque, per questo genere di superfici, il piano tangente in un qualunque punto, *ha due rette comuni con questa superficie*. O, con altri termini, non vi è un punto della superficie per il quale non possano imaginarsi due rette che si trovino tutte intere sopra questa superficie; ovvero ancora, *la superficie può considerarsi come generata da una retta in due maniere differenti* (ved. § 341).

375. Questa proprietà del piano tangente all'iperboloide ad una sola nappa anziche debilitare la definizione che data abbiamo (§ 370) del piano tangente, ne è, al contrario, una natural conseguenza; poichè, componendosi il piano tangente di tutte le tangenti condotte in un qualunque punto, se uno degli elementi della superficie è una linea retta, deve il piano tangente passare per questa retta che è la sua propria tangente.

Ed è perciò appunto che il piano, tangente al cono, tocca la superficie a seconda di una delle sue generatrici; ciò che a bastanza si rileva ancora da quanto precede.

In fatti, la superficie conica non è che un caso particolare dell'iperboloide, e si ottiene facendo $P = o$.

Dunque i valori qui sopra addotti di a, b, divengono

$$b = \frac{MM'y'z'}{M'(M''x'^2 - M'y'^2)} = \frac{MM'y'z'}{M'Mz'^2} = \frac{y'}{z'},$$

$$a = \frac{M'y'^2 + Mz'^2}{M''x'z'} = \frac{M''x'^2}{M''x'z'} = \frac{x'}{z'}.$$

Ora è facile lo scorgere che questi valori sono precisamente le tangenti degli angoli che formano, con l'asse delle z, le projezioni della generatrice del cono

$$Mz^2 + M'y^2 - M''x^2 = o.$$

Osserveremo che l'equazione (5) del n.° prece-

dente è quella di un cono il di cui centro ha per coordinate x', y', z'; poichè se ne deduce

$$\frac{y-y'}{z-z'}=\pm\sqrt{\left(\frac{M''(x-x')^2}{M'(z-z')^2}-M\right)}=F\left(\frac{x-x'}{z-z'}\right);$$

risultato che (§ 335) caratterizza una superficie conica.

376. Passiamo alle paraboloidi. La loro equazione è

$$Mz^2+M'y^2+2N''x=o. \;.\;.\;(1),$$

e quella del piano tangente al punto x', y', z' (§ 371)

$$Mzz'+M'yy'+N''(x+x')=o. \;.\;.\;(2),$$

Addizionando le (1) e (3), e dalla loro somma sottraendo il doppio della seconda, otterremo

$$M(z-z')^2+M'(y-y')^2=o. \;.\;.\;(4),$$

risultato che può sostituirsi alla equazione (1) quando non si tratti che di cercare i punti comuni alla superficie proposta ed al piano tangente. E siccome, nell'ipotesi che M, M′ abbiano lo stesso segno, la (4) non può restar soddisfatta che da $z=z'$, $y=y'$, ne siegue che la paraboloide ellitica non possa avere che *un punto comune* con il suo piano tangente.

Ma supponiamo M′ negativo, e poniamo in evidenza il segno, la (4) diverrà

$$M(z-z')^2-M'(y-y')^2=o. \;.\;.\;(5),$$

d'onde deducesi $y-y'=\pm(z-z')\sqrt{\frac{M}{M'}}$;

e veniamo a conoscere che la (5) rappresenta un sistema di due piani perpendicolari al piano delle yz, e le di cui intersecazioni con il piano tangente sono, in generale, due linee rette. Possiamo dunque concludere immediatamente che la paraboloide iperbolica ed il piano tangente in un qualunque punto

di questa superficie *hanno due rette comuni* che passano per questo punto.

Ma per fissare la posizione di queste rette, operando come sopra, combineremo la (5) e quella del piano tangente, cui può (§ 371) darsi la forma

$$Mz'(z-z')+M'(y-y')-N''(x-x')=o \ldots (6),$$

con le equazioni

$$x-x'=a(z-z'), \quad y-y'=b(-z') \ldots (7).$$

Sostituendo nelle (5) e (6) questi valori di $x-x'$, $y-y'$, e prescindendo dal fattore $z-z'$, risulta

$$M-M'b^2=o, \quad Mz'+M'by'-N''a=o.$$

La 1.ª ci dà $b=\pm\sqrt{\frac{M}{M'}}$; e dal valore di b sostituito nella 2.ª ottiensi

$$a=\frac{Mz'\pm y'\sqrt{MM'}}{N''};$$

Questi valori di a e di b sono sempre reali, nel caso del paraboloide iperbolico. Dunque, *non vi è alcun punto di questa superficie per il quale non possano imaginarsi due rette siluate tutte intere sulla superficie.*

Dalla sostituzione del valore di b nella 2.ª delle (7) avremo $y-y'=\pm(z-z')\sqrt{\frac{M}{M'}}$,

risultato identico con quello che ci ha dato la (5).

E siccome b è indipendente da x', y', z', ne siegue che, nei due sistemi di generazione della paraboloide iperbolica mediante una linea retta, le projezioni di tutte le rette di uno stesso sistema sopra il piano delle yz, *siano parallele fra loro.*

Dunque queste rette sono anch'esse situate *nei piani paralleli fra loro*; ed è ciò che può servire

a distinguere l' iperboloide ad una sola nappa dalla paraboloide iperbolica, benchè abbiano comune un modo di generazione.

In questo, *tutte le rette generatrici di uno stesso sistema sono parallele ad uno stesso piano*; mentre che, nell' altro, le generatrici hanno una qualunque direzione nello spazio.

La *superficie conoide* che ottenuta abbiamo (§ 338) col supporre che una retta scorresse lungo due altre ed in modo da restare costantemente parallela ad un piano, altro non è che le paraboloide iperbolica.

NOTA.

Questa nota è destinata a completare la teoria *dell' identità delle curve di 2.° grado con le sezioni coniche*.

Sopra un cono retto di una data dimensione vien richiesto di situare una curva di secondo grado cognita; o, in altri termini, *di fissare la posizione che deve avere un piano rapporto ad un cono retto, affinchè la curva d' intersecazione che ne risultà sia di 2.° grado, della quale sia data la particolare equazione.*

Soluzione. Per l' equazione generale delle sezioni coniche abbiamo trovato (§ 137)

$$y^2 = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta} \left[a \operatorname{sen} \beta . x - \operatorname{sen} (\alpha + \beta) x^2 \right] . . . (1).$$

e per la più semplice equazione delle tre curve di 2.° gr.° (§ 116)

$$y^2 = 2px + qx^2 . \quad . \quad . \quad (2).$$

Ma, dalla esposizione del quesito, le p, q, e l' ang. β che indica l'angolo al centro del cono, devono riguardarsi come cognite. Si tratta dunque di determinare, mediante le precedenti equazioni, le quantità a, α, in modo che queste equazioni siano identiche.

Ma, dallo sviluppare la (1) e dall' eguagliare i rispettivi coefficienti di x e di x^2 delle due equazioni, ottiensi

$$a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = 2p \cos^2 \frac{1}{2} \beta . \quad . \quad . \quad (3),$$

$$\text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ (\alpha+\beta) = -q\ \cos^2 \frac{1}{2}\beta. \quad . \quad . \quad (4);$$

e queste sono le due equazioni del problema.

La seconda che non racchiude che l' incognita α, potrà servirci a determinarla; e allora la (3) ci farà conoscere a. Ora, per isolare α, ci prevarremo del seguente artificio.

Dalla formola trigonometrica (t.° 3.° § 112)

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\ \text{sen}\ a\ \text{sen}\ b$$

si deduce $\text{sen}\ a\ \text{sen}\ b = \dfrac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$;

o, ponendo $a = \alpha+\beta,\quad b = \alpha,$

$$\text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ (\alpha+\beta) = \frac{\cos\beta - \cos(2\alpha+\beta)}{2};$$

Dunque la (4) diviene $\dfrac{\cos\beta - \cos(2\alpha+\beta)}{2} - q\cos^2\dfrac{1}{2}\beta$;

onde $\cos(2\alpha+\beta) = \cos\beta + 2q\cos^2\dfrac{1}{2}\beta. \quad . \quad . \quad (5);$

equazione atta a farci conoscere l' angolo α.

Dopo di aver calcolato l' ang. ($2\alpha+\beta$), sottrarremo l' ang. β, e poi prenderemo la metà del residuo per avere il valore di α.

Discussione. Tuttavia, affinchè quest' angolo sia capace di essere determinato, bisogna (t.° 3.° § 97) che il valore trovato per $\cos(2\alpha+\beta)$ sia compreso fra i due limiti -1 e $+1$; devono aversi cioè le due condizioni

$$\cos\beta + 2q\cos^2\frac{1}{2}\beta \geqq -1,$$

$$\cos\beta + 2q\cos^2\frac{1}{2}\beta \leqq +1.$$

E siccome abbiamo (t.° 3.° § 101)

$$\cos\beta = \cos^2\frac{1}{2}\beta - \text{sen}^2\frac{1}{2}\beta,$$

queste condizioni potranno trasformarsi nelle seguenti

$$\cos^2\frac{1}{2}\beta - \text{sen}^2\frac{1}{2}\beta + 2q\cos^2\frac{1}{2}\beta \geqq -1,$$

$\cos^2 \frac{1}{2} \beta - \text{sen}^2 \frac{1}{2} \beta + 2q \cos_2 \frac{1}{2} \beta \leqq 1$; ovvero, perchè

$$\cos^2 \frac{1}{2} \beta = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 \frac{1}{2} \beta}, \ \text{sen}^2 \frac{1}{2} \beta = \frac{\text{tang}^2 \frac{1}{2} \beta}{1 + \text{tang}^2 \frac{1}{2} \beta},$$

$$1 - \text{tang}^2 \frac{1}{2} \beta + 2q \geqq 1 - \text{tang}^2 \frac{1}{2} \beta,$$

$$1 - \text{tang}^2 \frac{1}{2} \beta + 2q \leqq 1 + \text{tang}^2 \frac{1}{2} \beta.$$

La prima si riduce chiaramente a $q \geqq -1$;

e la seconda a $q \leqq \text{tang}^2 \frac{1}{2} \beta$, o $\text{tang}^2 \frac{1}{2} \beta \geqq q$.

Ciò posto; esaminiamo successivamente i diversi casi che possono presentarsi, incominciando dal più semplice.

1.° Se la curva è *una parabola*, avremo $q = 0$; e siccome è (1.° 1.° pag. VIII e 16) $0 > -1$, $\text{tang}^2 \frac{1}{2} \beta > 0$, e le due condizioni precedenti restano addempite; d' onde può concludersi che, *sopra un cono retto di una data dimensione, è sempre possibile di situarvi una qualunque parabola di parametro noto.*

In questo caso, riprendendo la (4), diverrà essa

$$\text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ (\alpha + \beta) = 0,$$

e ci darà per α i seguenti valori

$$\alpha = 0, \quad \alpha = 200^\circ, \quad \alpha = -\beta, \quad \alpha = 200^\circ - \beta;$$

ciò che prova che il piano secante dev' essere parallelo ad una delle generatrici (Ved. § 138).

2.° Supponiamo che la curva data sia *un' ellisse*. Avremo in questo caso (§ 116), $q = -\frac{B^2}{A_2}$, essendo B, come è noto, essenzialmente minore di A. Perciò le due condizioni $-\frac{B^2}{A^2} > -1$, $\text{tang}^2 \frac{1}{2} \beta > -\frac{B}{A}$, sono addempite; ed

ogni ellisse, per quanto piccole o grandi siano le sue dimensioni, *può essere situata sopra un cono retto di dimensioni date*.

3.° Finalmente, se la curva è *un' iperbole*, nel qual caso è $q=+\frac{B^2}{A_2}$, la prima delle due condizioni di sopra resta evidentemente addempita.

In quanto alla seconda, che riducesi a $\tang \frac{1}{2}\beta \begin{smallmatrix}>\\=\end{smallmatrix}\frac{B_2}{A^2}$, ha questa bisogno di un qualche sviluppo.

Sia θ l' angolo dei due assintoti dell' iperbole data; sappiamo (§ 107) che $\tang \frac{1}{2}\theta=\frac{B}{A}$; dunque la precedente condizione diviene

$$\tang_2 \frac{1}{2}\beta \geqq \tang_2 \frac{1}{2}\theta;\quad \text{d' onde deducesi}\quad \beta \geqq \theta.$$

Perciò, affinchè un' iperbole, di cui si ha l' equazione, possa situarsi sopra un cono retto di cognita dimensione; bisogna che l' angolo al centro del cono sia *almeno* eguale all' angolo che formano fra loro i due assintoti della curva che si prende in considerazione.

Questa circostanza può spiegarsi con la Geometria. Figuriamoci condotto in un cono retto un *primo* sistema di piani, paralleli fra loro e paralleli all' asse; questi piani danno luogo ad una serie d' iperboli simili (§ 225), i di cui assintoti formano fra loro lo stesso angolo. Uno di questi piani, passando per lo stesso asse determina sopra la superficie due generatrici, facendo un angolo eguale a quello dei nostri assintoti.

Imaginiamo adesso *un secondo* sistema di piani, paralleli fra loro, ma non già paralleli all' asse, ed i quali non ostante diano ancora luogo a delle iperboli; l' angolo degli assintoti di tutte queste iperboli è costante ed eguale a quello delle due generatrici determinate da uno dei piani di questo sistema.

Ciò posto, osserviamo che, nell' angolo triedro formato da queste ultime generatrici e l' asse del cono, l' angolo delle generatrici è necessariamente minore della somma degli altri due angoli piani; ora questa somma altro non è che l' angolo al centro del cono, o l' angolo delle due generatrici del primo sistema dei piani. Dunque l' angolo de-

gli assintoti relativi al secondo sistema, è minore dell'angolo degli assintoti relativi al primo.

E in altri termini, il *massimo* degli angoli che formano fra loro gli assintoti di tutte le iperboli, che possono ottenersi sopra la superficie di un cono retto; è quello di due opposte generatrici, ovvero, *l'angolo al centro del cono*. Non è dunque possibile di situare *sopra un cono retto un' iperbole, i di cui assintoti facciano un' angolo maggiore dell' angolo al centro del cono*.

Ma, siccome nelle equazioni (3) e (4) l'angolo β può prendersi ad arbitrio, non cessa di essere dimostrato che *ogni curva di secondo grado di cui è cognita l'equazione, possa ottenersi per mezzo dell' intersecazione di un piano e di un cono di una convenevole dimensione*.

INDICE

CAP. V.

Dei Punti, della Linea retta e del Piano nello spazio.

CAP. VI.

Delle Superfici curve, ed in particolare delle Superfici di secondo grado.

CORREZIONI PER IL 5.° E 6.° TOMO

Pag.	Lin.	Errori	Correz.
11	3	$x=+b$	$x=+a$
	4	$y=+a$	$y=+b$
16	25	$\frac{x}{y}$	$\frac{y}{x}$
17	30	AP''	AP'''
18	3	$L'AX$	LAX
	6	$(\alpha-\delta)$	$(\alpha-\beta)$
23	3	$x=$	$x'=$
	22	$x'-y''$	$x'-x''$
24	14	si trova	si prova
25	3	a' ed a	α' ed α
	29	può	vuole
28	19	$aa'\text{sen}\beta$	$aa'\text{sen}^2\beta$
31	4	$x-y'$	$(x-x')$
	8	la (1)	la (2)
	17	$\sqrt{[}$ $N=$——	$N=\sqrt{[}-$
32	4	$ax'-b$	$ax'+b$
39	12	valori	i valori
44	10	$x-$	$x=-$
53	1	assib	assi obli-
49	23	$\overline{3}$	$\overline{2}$
55	17	$3cy.x$	$3cy'.x$
56	21	x'	x
58	28	$AB=o$, $AH=c'$	$AB=c$, $AH=x'$
	29	per	n. 53 per
60	26	essere	esserne
61	22	y_1-y_2	y_1-y_3
	25	$-cx'$	$-c\alpha'$
62	1	$\frac{c+x'}{2}$	$\frac{c+x'}{3}$
	1	$(-2x')$	$(c-2z')$
66	22	$=r^2$	$=r^2$
67	8	ed espri-mendo	che espri-mouo
	15	$+x'$	$+x'^2$
69	17	di due	dei due

Pag.	Lin.	Errori	Correz.
	21	p, q, r	p', q', r',
70	7	$(r'\pm r^2)$	$(r'\pm r)^2$
74	20	$r'y'$	$x'y'$,
80	5	$x=o$	$y=o$
	8	x'	x''
	22	r^2-x''	$r^2-x''^2$
81	18	$\sqrt{y'}$	rx'
	24	$\pm\sqrt{}$	$\pm r$
	25	$-\sqrt{}$	$\times\sqrt{}$
84	15	x' ed y	x' ed y_1
	17	y, y''	$y_1\ y''$
	23	partono si	partono da uno stesso punto
86	20	NM'	NM''
88	6	$NL'M'$	$NL'M''$
	10	h	$-h$
	15	NIL	NK
	18	condotti	condotto
	30	$Z'\times Z''$	$z'\times z''$
89	21	(fig. 52)	(fig. 50)
90	7	A	a
91	7	ed $rA'S$	ed $rA's$
92	37	(fig. 54)	(fig. 52)
95	10	$r-r''$	$r-r'$
96	20	$d''r'$	$d'r$
	22	$d''r''$	$d'r''$
97	7	$A''O'$	$a''O'$
98	25	$\overline{AM''^2}$	$\overline{AM}$,
99	13	$-2a$	$-2a_2$
	24	m^2I	m^2
101	25	O in I'	O in I, e da O in I'
102	28	OH	OA
106	8	$\underline{x'+x''}$	$\underline{x'-x''}$
110	16	è x	è x^2
111	22	$y=AB$	$y=A'B$
112	3	$\text{sen}B'HM$	$P'HM$
	5	$200°-\alpha$	$200°-\beta$

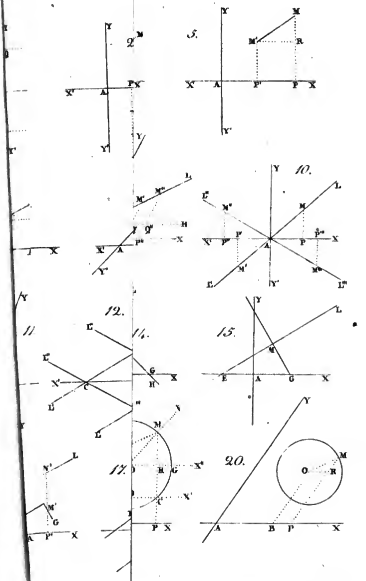
Pag.	Lin.	Errori	Correz.
	6	onde β	onde
	9	sen α	senα'
113	2	quella	quello
114	6	$\alpha=$	$\alpha'=$
	24	—PH	—P'H
115	8	$y\cos\alpha$	$y'\cos\alpha$
116	12	$a=v$, $b=v$, $\alpha=v$,	$a=o$, $b=o$, $\alpha=o$,
118	5	vengono	vengano
	12	intro-dussi	introdursi
	14	dal	da
120	5	CD,FI	CD
122	8	e si fa	e se si fa
	11	a^2y_2 GF^2—	A_2y_2 CF —
	27	CB^2-c^2	A^2-c^2
124	30	e segno	e con segno
126	7	c siegue	e ne siegue
	12	M>N	M<N
127	8	$\frac{B}{B^4}=x^2$	$\frac{B^2x^2=A^2}{B^4}$
128	12	fig. 75	fig. 73
136	11	$=OD'$	$=OC'$
138	1	dal punto	dal punto F
140	12	$=p$	$=p^2$
141	5	P	p
144	1	rimane	rimane priva
145	5	FG	FA
	20	fosse	fossero
150	21	renderla	renderli
	22	rettangolare	rettangolari
151	14	sen$^2\alpha$	sen α
	20	per2α	per cos2α
153	9	2N'	2N
	13	+SA	+Sa
155	3	dalla (1)	dalla (2)
	14	$\frac{A-C}{B}$	$\frac{B}{A-C}$
164	24	(fig. 84)	(fig. 83)
166	18	$\frac{B}{\overline{A}}$	$\frac{B^2}{\overline{A^2}}$
171	3		
174	5	cos 1 β	cos $\frac{1}{2}\beta$
179	6	sen$\alpha 2r$	sen$\alpha=2r$
182	23	$\alpha=\beta$	$\alpha=B$
184	1	$=\alpha$	$=2\alpha$
186	6	—B'	—B
187	6	F'	R'
189	20	=PM'	=PN
	21	punti, n.	punti, n'
190	21	paragonarsi con	paragonarsi che con
	27	$\frac{A}{B}$	$\frac{B}{A}$
192	17	fig. 100	fig. 98
193	5	x +A'	y' +A
194	20	*negativo*	*negativa*
195	24	y^2	y'
	28	∞a	∞
196	1	ciò a provare	a provare ciò,
197	25	IOL	IOL'
198	8	A^2B	A^2B^2
199	11	NM'	Nm
206	10	in x'	in x''
208	21	$-x''$	$-x'''$
209	29	B^4x''	$B^4x''^2$
210	10	$a=(1-\frac{A^2}{x''^2})a=$	$a=$
214	13	avrà	sarà
215	8	F'MR'	FMR
220	13	LF	LF'

Pag.	Lin.	Errori	Correz.
221	34	sinegio-	direzione
223	14	$B^2\cos^2\alpha'$	$B_2\cos^2 x$
224	8	$A^2 \text{sen} 2x^2$	$\overline{A^2 \text{sen}^2\alpha'}$
226	14	punto M	punto *m*
	17	Mi	mi
229	10	$\frac{B^2}{\overline{A}_2}$	$\frac{B'}{\overline{A}'}$
	23	Tt'	Tt
230	27	$\text{tang}^2 x'$	$\text{tang}^2\alpha$
235	5	$\cos^2\beta$	$\cos 2\beta$
240	11	A—B2	A^2—B2
241	30	fig. 113	fig. 111
244	14	A', A''	H', H''
	27	A'^2 y''	A'^2 y''^2
247	19	dato di	dato M di
251	5	A'^2	A^2
252	10	diminui-	diminui-
253		sce	sce y
	12	sen α	sen β
254	9	x' '	x' y'
257	5	fig. 15	fig. 115
267	12	del	dal
		Ax	AX
	8	$2x''y$ —	$2x''y''$ —
268		py^4+2p	$py''+2p$
		$y4$	y''
269	35	due par-	due parti
			eguali
272	18	*delle a*	*delle y*
275	1	$''^2=$	$y''^2=$
	16	m'	m
		rsen (ρ	r sen ρ
280	19	$+a$	
281	35	$\overline{AO}^2$	$\overline{AO}'^2$
282	3	ON	O'N
283	22	(A^2—	—(A^2—
186	14	ρ a—ρ	—ρ a+ρ
286	25	es stati	espres-
	26	diversi	diversi
		pres-	stati
287	26	OFG'	OFG', o

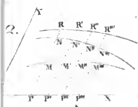
Pag.	Lin.	Errori	Correz.
			fra zero e
			OFK'
288	26	$=\frac{p}{2}$	$=p$
289	15	$x+C\cos\rho$	$A+c\cos\rho$
	20	$=A-$ A^2-c^2	$=\frac{A^2-c}{}$
290	8	$x+c\cos\rho$	$A+c\cos 2$
	11	$+A =$	$+A=$
291	24	Ac	ac
292	1	b_2	b_2
293	5	sS=	, s=
	22	(§ 155)	(§ 154)
295	10	F' ed f	F' ed f sia-
			i fochi
299	18	alcuna	alcuno
302	22	$(-x'')$	$(x-x''$
321	13	ed F	ed E
325	19	=—	$=x-$
226	5		$\overline{2A}$
327	13	$=-\frac{B+}{}$	$=\frac{-B+}{}$
330	23	$=\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{2}$
331	15	$\overline{x}$	$\overline{x^2}$
332	22	$y=$	$x=$
335	20	passa	passano
338	2	—B	+B
339	16	$=\frac{\cdot}{2}$	$=\frac{9}{2}$
344	5	$-\frac{3}{6}$	$-\frac{3}{5}$
346	4	§ 254	§ 124
350	1	$+x^2$	$+Cx^2$
	16	$A\text{sen}^2\alpha'$,	$A\text{sen}^2\alpha$
	21	$\alpha=$	$\alpha+$
	22	$\text{tang}\alpha+$	$\text{tang}\ \alpha=$
351	12	$\text{tang}\ \alpha$	$\text{tang}\alpha+$

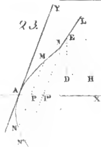
Pag.	Lin.	Errori	Correz.
	17	$+CA$	$+(A)$
	19	XY	xy
355	14	$A'y^2$	A'^2y^2
359	28	RF	RT
360	24	§ 153	§ 167
362	15	M'N	M'N'
364	2	§ 326	§ 196
366	21	istuito	istituto
368	10	$+yc''$	$+cy''$
371	3	k°	k^2
	6	§ 147	§ 47
372	5	k°	k^2
374	8	Facciano	Facciamo
	14	OMQ	OMQ simile a BNR
380	17	AMG'	GMG'
381	27	(fig. 168)	(fig. 165)
383	30	x^i	x^5
384	7	fig. 162	fig. 166
388	2	$-o$	-1
	5	$-b$	-6
	6	170	168
	24	due	dei
389	3	numerica	numeriche
391	23	segamento	segmento
13	23	mn'	$m'n'$
	28	(§ 30)	(§ 10)
14	11	piano ad	piano
15	8	ottenere	ottenerne
17	20	baz	bz
19	24	$y''y''$	$y'y''$
20	14	b^a	b'^2
22	13	cos =	$\cos_{2\gamma}=$
29	ult.	$\frac{D}{B}=s$	$\frac{D}{C}=s$
34	4	$\overline{}\ \overline{b}$	$\overline{}\ \overline{\beta}$
41	8	paralleli	parallele
46	29	$=az,$	$=az+x,$
53	15	KK''	KK'
56	26	ri	si
62	4	$y=o$	$\gamma=o$
65	23	$\pm$	$+$
69	22	ha la	con la
72	11	, ,	, z ,

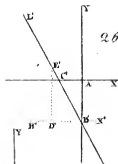
I.

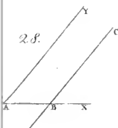


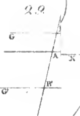
Raff. d' Angelo inc.

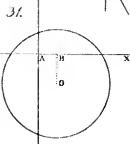


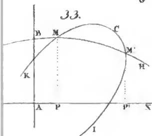


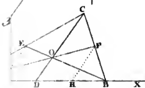


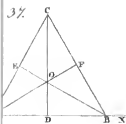


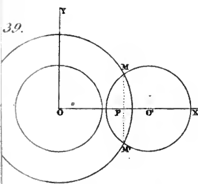




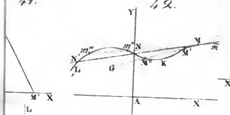


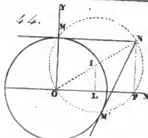


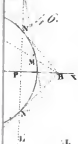


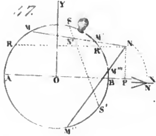


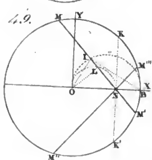
Raff. d'Angelo inc.

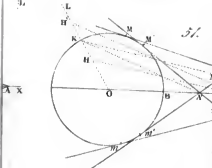


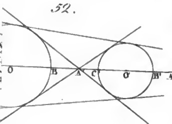


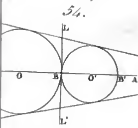


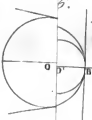


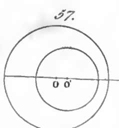








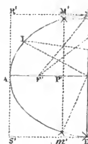




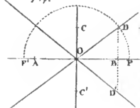
Raff. d'Angelo inc.



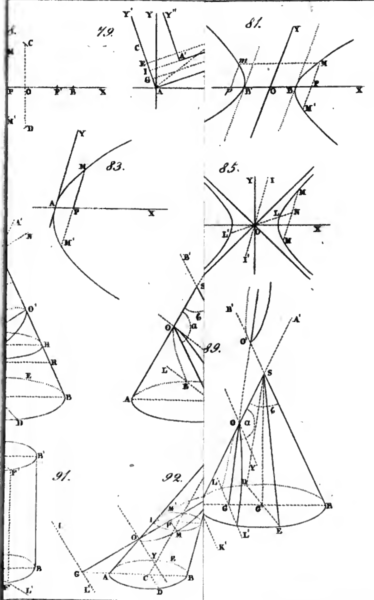



R'
M'
I
A
F'
P'
S'
m'

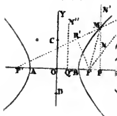


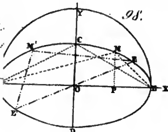

C
D
O
F'
A
B
P
C'
D'

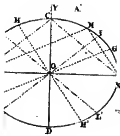
V.

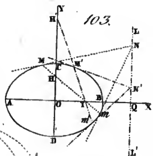


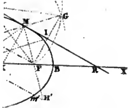
Raff. d' Angelo incise

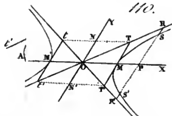




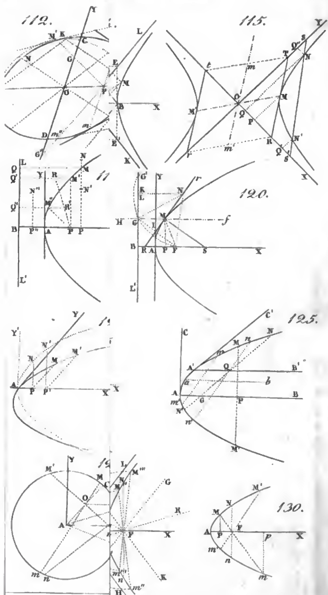








Raff. d'Angelo inc.

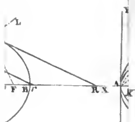


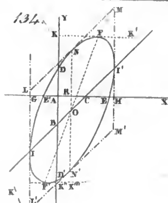
Raff. d'Angelo inc.

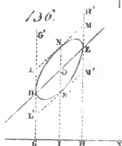


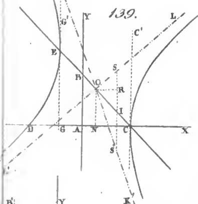


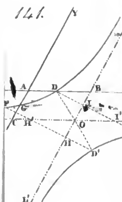
VIII.

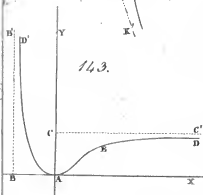




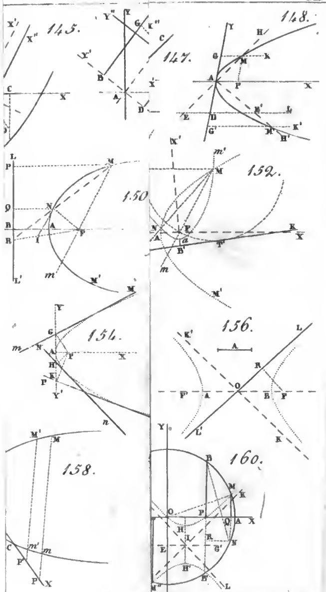






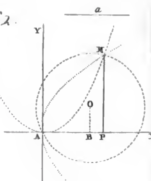


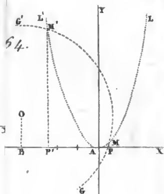
Raff. d'Angelo inc.

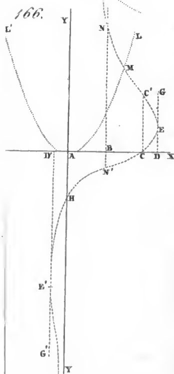


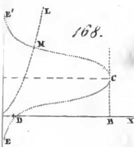
Raff. d' Angelo inc.

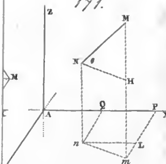
X.



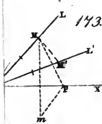


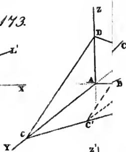


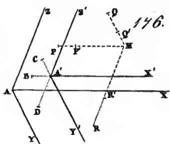


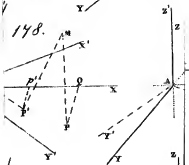


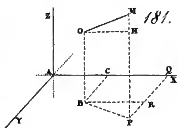
Raff d'Angelo inc.

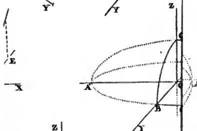


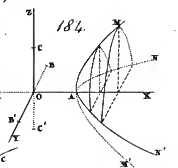


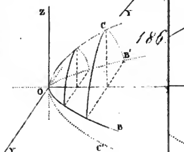












Raff. d'Angelo inc.

